



โครงการคณิตศาสตร์

เรื่อง การหาพื้นที่รูป  $n$  เหลี่ยมด้านเท่ามุมเท่าที่แนบในวงกลม

$$x^2 + y^2 + Ax + By + C = 0$$

โดย

เด็กหญิงฐิตาภา	ปกครองบ้าน
เด็กหญิงเมธาพร	ประสพ
นางสาววันสนันท์	ผัดกันตุ๋ย

ครูที่ปรึกษา

นายอาหนึ่ง	ชูไวย
นางรัตติยา	วงศ์วุฒิ

รายงานฉบับนี้เป็นส่วนประกอบของโครงการคณิตศาสตร์  
ประเภท การสร้างทฤษฎีหรือคำอธิบาย ระดับ มัธยมศึกษาตอนต้น  
โรงเรียนเทิงวิทยาคม ต.เวียง อ.เทิง จ.เชียงราย 57160  
สำนักงานเขตพื้นที่การศึกษามัธยมศึกษา เขต 36 (เชียงราย – พะเยา)  
เนื่องในงานแข่งขันทักษะความสามารถทางวิชาการของนักเรียน  
ประจำปีการศึกษา 2561

โครงการประเภทการสร้างทฤษฎีหรือคำอธิบาย  
เรื่อง การหาพื้นที่รูป  $n$  เหลี่ยมด้านเท่ามุมเท่าที่แนบในวงกลม

$$x^2 + y^2 + Ax + By + C = 0$$

คณะผู้ศึกษา

- |                    |            |
|--------------------|------------|
| 1. เด็กหญิงฐิตาภา  | ปกครองบ้าน |
| 2. เด็กหญิงเมธาพร  | ประสพ      |
| 3. นางสาววันสนันท์ | ผัดกันด้อย |

ครูที่ปรึกษา

- |               |          |
|---------------|----------|
| 1. นายอาหนึ่ง | ชูไวย    |
| 2. นางรัตติยา | วงศ์วุฒิ |

ระดับการศึกษา มัธยมศึกษาตอนต้น

สถานศึกษา โรงเรียนเทิงวิทยาคม อำเภอเทิง จังหวัดเชียงราย 57160

ปีการศึกษา 2561

บทคัดย่อ

การศึกษาในครั้งนี้ มีจุดมุ่งหมายเพื่อศึกษาสูตรการหาพื้นที่รูป  $n$  เหลี่ยมด้านเท่ามุมเท่าที่แนบในวงกลมที่มีสมการรูปแบบทั่วไปเป็น  $x^2 + y^2 + Ax + By + C = 0$  ผลการศึกษาพบว่า พื้นที่มีค่าเท่ากับ

$\frac{1}{8}n(A^2 + B^2 - 4C)\sin\left(\frac{360^\circ}{n}\right)$  และขนาดของมุมแต่ละมุมของรูป  $n$  เหลี่ยมด้านเท่ามุมเท่ามีขนาด

$\frac{1}{n}(n-2) \cdot 180^\circ$

## กิตติกรรมประกาศ

การศึกษาโครงการคณิตศาสตร์ประเภทสร้างทฤษฎีหรือคำอธิบาย เรื่อง การหาพื้นที่รูป  $n$  เหลี่ยม ด้านเท่ามุมเท่าที่แนบในวงกลม  $x^2 + y^2 + Ax + By + C = 0$  เล่มนี้ สำเร็จลุล่วงโดยได้รับความอนุเคราะห์อย่างดีจากครูอาหนึ่ง ชูไวย และครูรัตติยา วงศ์วุฒิ ซึ่งได้กรุณาให้คำปรึกษาแนะนำแนวคิดวิธีการและสละเวลาอันมีค่าแก้ไขข้อบกพร่องของเนื้อหา และสำนวนภาษาด้วยความเอาใจใส่อย่างดียิ่ง คณะผู้ศึกษาขอกราบขอบพระคุณเป็นอย่างสูง ณ โอกาสนี้

ขอขอบพระคุณคณะผู้บริหารโรงเรียนเทิงวิทยาคมทุกท่าน หัวหน้ากลุ่มสาระการเรียนรู้คณิตศาสตร์ และคณะครูในกลุ่มสาระการเรียนรู้คณิตศาสตร์ โรงเรียนเทิงวิทยาคมทุกท่านที่ให้การสนับสนุนการดำเนินการศึกษาโครงการเล่มนี้จนสำเร็จด้วยดี

คุณค่าและสารัตถประโยชน์ อันพึงมาจากโครงการคณิตศาสตร์เล่มนี้ในครั้งนี้ คณะผู้ศึกษาขอน้อมเป็นเครื่องบูชาพระคุณแต่ บิดา มารดา ตลอดจนครูอาจารย์ทุกท่าน ที่ประสิทธิ์ประสาทวิชาความรู้แก่คณะผู้ศึกษาตลอดมา

คณะผู้ศึกษา

## สารบัญ

เรื่อง	หน้า
บทคัดย่อ	ก
กิตติกรรมประกาศ	ข
<b>บทที่ 1 บทนำ</b>	1
ที่มาและความสำคัญของโครงการ	1
จุดประสงค์ของการศึกษา	1
ขอบเขตของการศึกษา	1
นิยามศัพท์เฉพาะ	2
กรอบแนวคิดการศึกษา	2
<b>บทที่ 2 เอกสารและงานวิจัยที่เกี่ยวข้อง</b>	3
<b>บทที่ 3 วิธีการดำเนินโครงการ</b>	6
<b>บทที่ 4 ผลการศึกษา</b>	7
<b>บทที่ 5 สรุปผลการศึกษาและข้อเสนอแนะ</b>	11
ผลการศึกษาจากการดำเนินโครงการ	11
ข้อเสนอแนะจากการดำเนินการศึกษาโครงการ	11
<b>บรรณานุกรม</b>	
<b>ภาคผนวก</b>	
ภาคผนวก ก ประวัติผู้จัดทำ	
ภาคผนวก ข ประมวลภาพการดำเนินการศึกษา	

สารบัญตาราง

ตาราง

หน้า

ตารางที่ 1 ตารางการดำเนินงาน

6

## สารบัญภาพ

ภาพ		หน้า
ภาพที่ 1	กรอบแนวคิดการศึกษา	2
ภาพที่ 2	รูปวงกลมตามสมการวงกลมที่กำหนดจุดศูนย์กลางต่างๆ กัน	3
ภาพที่ 3	กราฟของสมการวงกลมที่มีจุดศูนย์กลาง $(h, k)$ คือ $\left(-\frac{A}{2}, -\frac{B}{2}\right)$ และรัศมี $R$	4
ภาพที่ 4	ความสัมพันธ์ของด้านของรูปสามเหลี่ยมมุมฉากที่เกิดเป็นอัตราส่วนตรีโกณมิติ	5
ภาพที่ 5	แนวคิดการสร้างรูป $n$ เหลี่ยมด้านเท่ามุมเท่า โดยที่ $n \geq 3$ ที่แนบในรูปวงกลมรัศมี $R$ ใดๆ	7

## บทที่ 1

### บทนำ

#### ที่มาและความสำคัญ

คณิตศาสตร์เป็นศาสตร์ที่เกี่ยวข้องกับชีวิตประจำวันของทุกคน โดยคนส่วนใหญ่มักมีความคิดว่าคณิตศาสตร์เป็นเรื่องยากต่อการทำความเข้าใจและไม่อยากศึกษาต่อ อันเนื่องจากความคิดที่ว่า คณิตศาสตร์เป็นเรื่องของหลักการทฤษฎีที่มีความซับซ้อน และไม่น่าสนใจ

การหาพื้นที่รูป  $n$  เหลี่ยมด้านเท่ามุมเท่าต่างๆ มักเป็นปัญหาที่น่าสนใจและนิยมสร้างรูปที่ต้องการหาขึ้นแบบในรูปวงกลม เพราะสามารถหาพื้นที่จากการประยุกต์แบ่งมุมที่จุดศูนย์กลางของวงกลมซึ่งมีขนาด 360 องศา ได้

ด้วยเหตุนี้คณะผู้ศึกษาจึงมีความสนใจศึกษาการหาพื้นที่รูป  $n$  เหลี่ยมด้านเท่ามุมเท่าต่างๆ ที่แนบในสมการวงกลมในรูป  $x^2 + y^2 + Ax + By + C = 0$

#### วัตถุประสงค์

1. เพื่อศึกษาสูตรการหาพื้นที่รูป  $n$  เหลี่ยมด้านเท่ามุมเท่า โดยที่  $n \geq 3$  ที่แนบในวงกลมที่มีสมการรูปแบบทั่วไปเป็น  $x^2 + y^2 + Ax + By + C = 0$

#### ผลที่คาดว่าจะได้รับ

1. ได้สูตรการหาพื้นที่รูป  $n$  เหลี่ยมด้านเท่ามุมเท่า โดยที่  $n \geq 3$  ที่แนบในวงกลมที่มีสมการรูปแบบทั่วไปเป็น  $x^2 + y^2 + Ax + By + C = 0$
2. ได้พัฒนาเจตคติที่มีต่อวิชาคณิตศาสตร์

#### ขอบเขตการศึกษา

##### ขอบเขตการศึกษาด้านเนื้อหา

การศึกษาค้นคว้าในเรื่องนี้ มุ่งศึกษาศึกษาการหาพื้นที่รูป  $n$  เหลี่ยมด้านเท่ามุมเท่า โดยที่  $n \geq 3$  ที่แนบในวงกลมที่มีสมการรูปแบบทั่วไปเป็น  $x^2 + y^2 + Ax + By + C = 0$

##### ขอบเขตด้านระยะเวลา

เดือนกรกฎาคม 2561 – เดือนกันยายน 2561

## นิยามศัพท์เฉพาะและสัญลักษณ์ที่ใช้ในการศึกษา

สูตรคำนวณ หมายถึง สูตรการหาพื้นที่รูป  $n$  เหลี่ยมด้านเท่ามุมเท่า โดยที่  $n \geq 3$  ที่แนบในวงกลมที่มีสมการรูปแบบทั่วไปเป็น  $x^2 + y^2 + Ax + By + C = 0$

## กรอบแนวคิดการศึกษา



ภาพที่ 1 กรอบแนวคิดการศึกษา



## บทที่ 2 เอกสารที่เกี่ยวข้อง

ในการดำเนินการศึกษาโครงการ เรื่อง การหาพื้นที่รูป  $n$  เหลี่ยมด้านเท่ามุมเท่า โดยที่  $n \geq 3$  ที่แนบในวงกลมที่มีสมการรูปแบบทั่วไปเป็น  $x^2 + y^2 + Ax + By + C = 0$  คณะผู้ศึกษาได้ค้นคว้าเอกสารที่เกี่ยวข้องโดยลำดับเนื้อหาที่เป็นสาระสำคัญดังต่อไปนี้

1. วงกลม
2. อัตราส่วนตรีโกณมิติ

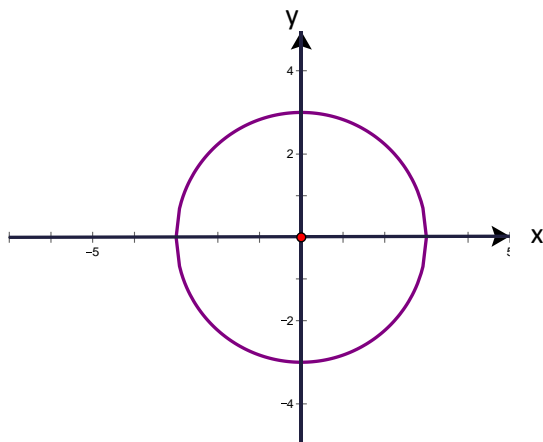
ซึ่งแต่ละหัวข้อนี้มีรายละเอียด ดังนี้

### 1. วงกลม

นิยาม วงกลม คือ เซตของจุดทุกจุดบนระนาบที่อยู่ห่างจากจุดคงที่จุดหนึ่ง เป็นระยะทางเท่ากัน

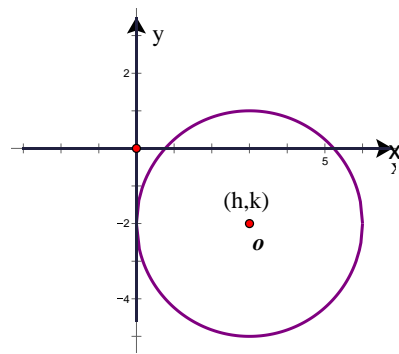
จุดคงที่คือจุดศูนย์กลางของวงกลม ใช้เป็นพิกัด  $(h, k)$

ระยะทางคงที่คือรัศมีของวงกลมใช้เป็น  $r$



สมการของวงกลมเมื่อ จุดศูนย์กลางอยู่ที่จุด  $(0, 0)$

$$x^2 + y^2 = r^2$$



สมการของวงกลมเมื่อ จุดศูนย์กลางอยู่ที่จุด  $(h, k)$

$$(x - h)^2 + (y - k)^2 = r^2$$

ภาพที่ 2 รูปวงกลมตามสมการวงกลมที่กำหนดจุดศูนย์กลางต่างๆ กัน

เมื่อกระจายเทอม กำลังสอง จะได้สมการวงกลมเป็น  $x^2 + y^2 - 2hx - 2ky + h^2 + k^2 - r^2 = 0$

ให้  $-2h = D$  ;  $-2k = E$  ;  $h^2 + k^2 - r^2 = F$

จะได้สมการวงกลมรูปแบบทั่วไปเป็น  $x^2 + y^2 + Dx + Ey + F = 0$

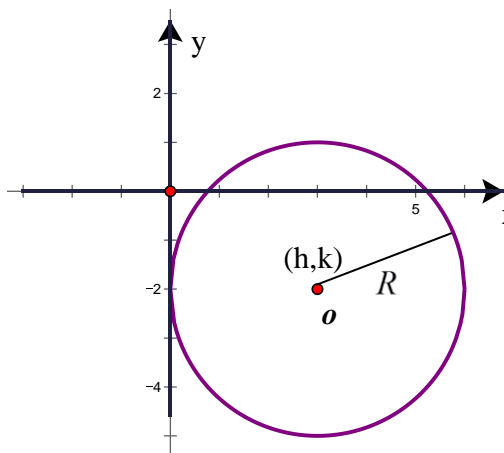
โดย  $h = \frac{D}{-2}$  ;  $k = \frac{E}{-2}$

จากสมการวงกลมที่มีรูปแบบทั่วไป คือ  $x^2 + y^2 + Ax + By + C = 0$

ซึ่งจากรูปแบบดังกล่าวทำให้ได้ว่า

$$\begin{aligned} (x^2 + Ax) + (y^2 + By) + C &= 0 \\ \left(x^2 + \frac{2Ax}{2} + \left(\frac{A}{2}\right)^2\right) - \left(\frac{A}{2}\right)^2 + \left(y^2 + \frac{2By}{2} + \left(\frac{B}{2}\right)^2\right) - \left(\frac{B}{2}\right)^2 + C &= 0 \\ \left(x + \frac{A}{2}\right)^2 + \left(y + \frac{B}{2}\right)^2 - \left(\frac{A}{2}\right)^2 - \left(\frac{B}{2}\right)^2 + C &= 0 \\ \left(x + \frac{A}{2}\right)^2 + \left(y + \frac{B}{2}\right)^2 &= \left(\frac{A}{2}\right)^2 + \left(\frac{B}{2}\right)^2 - C \\ \left(x + \frac{A}{2}\right)^2 + \left(y + \frac{B}{2}\right)^2 &= \frac{A^2}{4} + \frac{B^2}{4} - C \\ \left(x + \frac{A}{2}\right)^2 + \left(y + \frac{B}{2}\right)^2 &= \frac{A^2 + B^2 - 4C}{4} \\ \left(x + \frac{A}{2}\right)^2 + \left(y + \frac{B}{2}\right)^2 &= \left(\sqrt{\frac{A^2 + B^2 - 4C}{4}}\right)^2 \\ \left(x - \left(-\frac{A}{2}\right)\right)^2 + \left(y - \left(-\frac{B}{2}\right)\right)^2 &= \left(\frac{\sqrt{A^2 + B^2 - 4C}}{2}\right)^2 \end{aligned}$$

ซึ่งจะได้จุดศูนย์กลาง  $(h, k)$  คือ  $\left(-\frac{A}{2}, -\frac{B}{2}\right)$  และ  $r = \frac{\sqrt{A^2 + B^2 - 4C}}{2}$

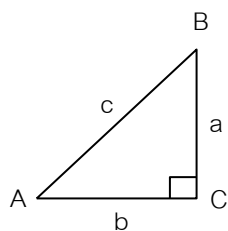


ภาพที่ 3 กราฟของสมการวงกลมที่มีจุดศูนย์กลาง  $(h, k)$  คือ  $\left(-\frac{A}{2}, -\frac{B}{2}\right)$  และรัศมี  $R$

ซึ่งในรายงานการศึกษาเล่มนี้ จะให้รัศมี  $r$  แทนด้วย  $R$

## 2. อัตราส่วนตรีโกณมิติ

ให้ ABC เป็นรูปสามเหลี่ยมมุมฉาก ที่มีมุม C เป็นมุมฉาก



ภาพที่ 4 ความสัมพันธ์ของด้านของรูปสามเหลี่ยมมุมฉากที่เกิดเป็นอัตราส่วนตรีโกณมิติ

$$\text{จากรูปจะได้ } \sin A = \frac{a}{c}, \quad \cos B = \frac{a}{c}$$

$$\therefore \sin A = \cos B$$

$$\cos A = \frac{b}{c}, \quad \sin B = \frac{b}{c}$$

$$\therefore \cos A = \sin B$$

$$\tan A = \frac{a}{b}, \quad \tan B = \frac{b}{a}$$

$$= \frac{1}{\frac{b}{a}}$$

$$\therefore \tan A = \frac{1}{\tan B}$$

## กฎของไซน์ (The Law of Sine)

ในรูปสามเหลี่ยม ABC ใดๆ ถ้า a, b และ c เป็นความยาวของด้านตรงข้ามมุม A, B และ C ตามลำดับ แล้วจะได้ความสัมพันธ์ดังนี้

$$\frac{\sin A}{a} = \frac{\sin B}{b} = \frac{\sin C}{c}$$

หรือ

$$\frac{a}{\sin A} = \frac{b}{\sin B} = \frac{c}{\sin C}$$

### บทที่ 3

#### วิธีการดำเนินการศึกษา

##### 1. ตารางการดำเนินงาน

##### ตารางที่ 1 ตารางการดำเนินงาน

ที่	วัน เดือน ปี	กิจกรรม การดำเนินการศึกษา	ผู้รับผิดชอบ
1	3-10 ก.ค. 2561	คัดเลือกหัวข้อโครงการ	คณะผู้ศึกษาทุกคน
2	11-15 ก.ค. 2561	ส่งหัวข้อโครงการปรึกษาครูที่ปรึกษา	คณะผู้ศึกษาทุกคน
3	16-20 ก.ค. 2561	กำหนดแนวทางและขอบเขตของการศึกษา ร่วมกับครูที่ปรึกษา	คณะผู้ศึกษาทุกคนและ ครูที่ปรึกษา
4	21-23 ส.ค. 2561	ทบทวนความรู้เบื้องต้นเกี่ยวกับกำลังสอง สมบูรณ์สองตัวแปรและสมการวงกลมในรูป $x^2 + y^2 + Ax + By + C = 0$	คณะผู้ศึกษาทุกคนและ ครูที่ปรึกษา
5	24-25 ส.ค. 2561	ศึกษารูปแบบความสัมพันธ์ของการแบ่งรูป $n$ เหลี่ยมด้านเท่ามุมเท่า	คณะผู้ศึกษาทุกคนและ ครูที่ปรึกษา
6	25-26 ส.ค. 2561	ทบทวนความรู้เบื้องต้นเกี่ยวกับอัตราส่วน ตรีโกณมิติ	คณะผู้ศึกษาทุกคนและ ครูที่ปรึกษา
7	27-31 ส.ค. 2561	หาสูตรการหาพื้นที่ของรูป $n$ เหลี่ยม ด้านเท่ามุมเท่าต่างๆ ที่แนบในสมการวงกลม ในรูป $x^2 + y^2 + Ax + By + C = 0$	คณะผู้ศึกษาทุกคนและ ครูที่ปรึกษา
8	1-5 ก.ย. 2561	สรุปการศึกษารวบรวมข้อค้นพบความรู้ ทฤษฎี หลักการ แนวคิด ระเบียบวิธี และ ผลลัพธ์จากการศึกษาต่อครูที่ปรึกษา เพื่อรับการวิพากษ์และแก้ไขจากครูที่ปรึกษา	คณะผู้ศึกษาทุกคน
9	6-10 ก.ย. 2561	จัดพิมพ์รูปเล่มโครงการ	คณะผู้ศึกษาทุกคน
10	11-15 ก.ย. 2561	จัดทำบอร์ดนำเสนอโครงการและแผ่นพับ แนะนำโครงการ	คณะผู้ศึกษาทุกคน

##### ลำดับการดำเนินการศึกษา

1. ศึกษาสูตรการหาพื้นที่ของรูป  $n$  เหลี่ยมด้านเท่ามุมเท่า โดยที่  $n \geq 3$  ที่แนบในรูปวงกลมใดๆ
2. ศึกษาสูตรการหาพื้นที่ของรูป  $n$  เหลี่ยมด้านเท่ามุมเท่า โดยที่  $n \geq 3$  ที่แนบในรูปวงกลมใดๆ  
ที่มีสมการรูปแบบทั่วไปเป็น  $x^2 + y^2 + Ax + By + C = 0$

## บทที่ 4

### ผลการดำเนินการศึกษา

จากผลการดำเนินการศึกษาโครงการประเภทสร้างทฤษฎีหรือคำอธิบาย เรื่อง การหาพื้นที่รูป  $n$  เหลี่ยมด้านเท่ามุมเท่า โดยที่  $n \geq 3$  ที่แนบในวงกลมที่มีสมการรูปแบบทั่วไปเป็น  $x^2 + y^2 + Ax + By + C = 0$  ในครั้งนี้ คณะผู้ศึกษาได้ผลการศึกษาแบ่งเป็น 2 ตอน ตามลำดับดังนี้

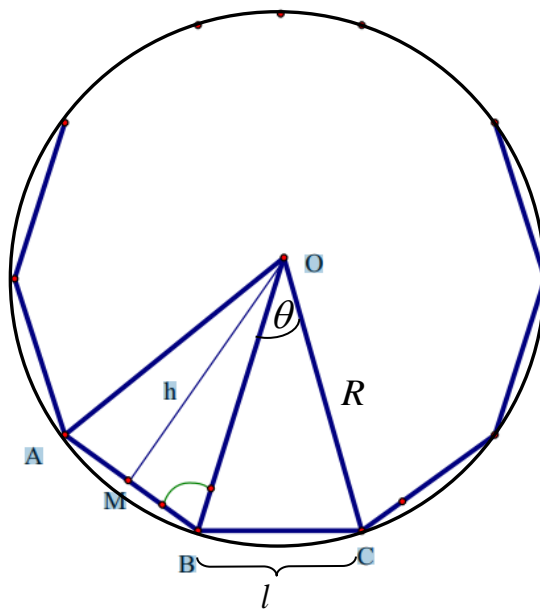
ตอนที่ 1 การศึกษาสูตรการหาพื้นที่ของรูป  $n$  เหลี่ยมด้านเท่ามุมเท่า โดยที่  $n \geq 3$  ที่แนบในรูปวงกลมใดๆ

ตอนที่ 2 การศึกษาสูตรการหาพื้นที่ของรูป  $n$  เหลี่ยมด้านเท่ามุมเท่า โดยที่  $n \geq 3$  ที่แนบในรูปวงกลมใดๆ ที่มี สมการรูปแบบทั่วไปเป็น  $x^2 + y^2 + Ax + By + C = 0$

ซึ่งแต่ละตอนมีรายละเอียดดังต่อไปนี้

ตอนที่ 1 การศึกษาสูตรการหาพื้นที่ของรูป  $n$  เหลี่ยมด้านเท่ามุมเท่า โดยที่  $n \geq 3$  ที่แนบในรูปวงกลมใดๆ

จากที่เราทราบว่าผลรวมของมุมภายในของรูปวงกลมเท่ากับ  $360^\circ$  ซึ่งถ้าหากเราต้องการสร้างรูป  $n$  เหลี่ยมด้านเท่ามุมเท่า โดยที่  $n \geq 3$  ที่แนบในรูปวงกลมรัศมี  $R$  ใดๆ เราสามารถสร้างได้ดังรูป



ภาพที่ 5 แนวคิดการสร้างรูป  $n$  เหลี่ยมด้านเท่ามุมเท่า โดยที่  $n \geq 3$  ที่แนบในรูปวงกลมรัศมี  $R$  ใดๆ

จากภาพที่ 5 และกฎของไซน์ (หน้า 5) ทำให้ได้ว่า  $\triangle AOB \cong \triangle BOC$

ซึ่งทำให้ได้ว่า พื้นที่ของรูปสามเหลี่ยมหน้าจั่ว  $AOB$

$$\begin{aligned} &= \frac{1}{2}(OM)(AB) \\ &= \frac{1}{2}(R \sin A)(BC) \end{aligned}$$

$$= \frac{1}{2}(R \sin A)l$$

$$= \frac{1}{2}Rl \sin A$$

จากสามเหลี่ยม  $AOB$  เป็นสามเหลี่ยมหน้าจั่ว และผลรวมของมุมภายในของรูปสามเหลี่ยมใดๆ เป็น  $180^\circ$  ทำให้ได้ว่า

$$\begin{aligned} \text{พื้นที่ของรูปสามเหลี่ยมหน้าจั่ว } AOB &= \frac{1}{2}Rl \sin A \\ &= \frac{1}{2}Rl \sin \left( \frac{180 - \frac{360}{n}}{2} \right)^\circ \\ &= \frac{1}{2}Rl \sin \left( \frac{180n - 360}{2n} \right)^\circ \\ &= \frac{1}{2}Rl \sin \left( \frac{180(n-2)}{2n} \right)^\circ \\ &= \frac{1}{2}Rl \sin \left( \frac{90(n-2)}{n} \right)^\circ \text{ ตารางหน่วย} \end{aligned}$$

ซึ่งจะได้ พื้นที่ของรูปสามเหลี่ยมหน้าจั่ว  $AOB = \frac{1}{2}Rl \sin \left( \frac{90(n-2)}{n} \right)^\circ$  ตารางหน่วย -----> ①

พื้นที่ของรูป  $n$  เหลี่ยมด้านเท่ามุมเท่า โดยที่  $n \geq 3$  ที่แนบในรูปวงกลมรัศมี  $R$  ใดๆ ที่ประกอบด้วยรูปสามเหลี่ยมหน้าจั่วที่เท่ากันทุกประการ  $n$  รูป  $= \frac{1}{2}nRl \sin \left( \frac{90(n-2)}{n} \right)^\circ$  ตารางหน่วย -----> ②

จากรูปสามเหลี่ยมหน้าจั่ว  $BOC$  ซึ่งเท่ากันทุกประการกับรูปสามเหลี่ยมหน้าจั่ว  $AOB$  ดังภาพที่ 5 (หน้า 8) เป็นรูปสามเหลี่ยมหน้าจั่ว 1 รูป ใน  $n$  รูปที่เท่ากันทุกประการกับรูปสามเหลี่ยมหน้าจั่วรูปอื่นๆ ที่เกิดจากการแบ่งออกเป็น  $n$  รูป ที่แนบในรูปวงกลมรัศมี  $R$  ใดๆ ทำให้เราทราบว่า  $\theta = \frac{360}{n}$  และกฎของไซน์ (หน้า 5) ทำให้ได้ว่า

$$\frac{\sin B}{R} = \frac{\sin \theta}{l}$$

$$l \sin B = R \sin \theta$$

$$l = \frac{R \sin \theta}{\sin B}$$

$$l = \frac{R \sin\left(\frac{360}{n}\right)^\circ}{\sin\left(\frac{90(n-2)}{n}\right)^\circ}$$

ดังนั้นความยาวของฐานของรูปสามเหลี่ยมหน้าจั่ว ซึ่งยาว  $l$  หน่วย ที่แนบในรูปวงกลมที่มีรัศมียาว  $R$  หน่วย สามารถคำนวณได้ดังนี้

$$l = \frac{R \sin\left(\frac{360}{n}\right)^\circ}{\sin\left(\frac{90(n-2)}{n}\right)^\circ} \text{ หน่วย} \text{-----> ③}$$

จากสมการที่ ② และ ③ จะได้ว่า

พื้นที่ของรูป  $n$  เหลี่ยมด้านเท่ามุมเท่า โดยที่  $n \geq 3$  ที่แนบในรูปวงกลมรัศมี  $R$  ใดๆ ที่ประกอบด้วย รูปสามเหลี่ยมหน้าจั่วที่เท่ากันทุกประการ  $n$  รูป

$$\begin{aligned} &= \frac{1}{2} n R^2 \left( \frac{\sin\left(\frac{360}{n}\right)^\circ}{\sin\left(\frac{90(n-2)}{n}\right)^\circ} \right) \sin\left(\frac{90(n-2)}{n}\right)^\circ \\ &= \frac{1}{2} n R^2 \frac{\sin\left(\frac{360}{n}\right)^\circ}{\sin\left(\frac{90(n-2)}{n}\right)^\circ} \sin\left(\frac{90(n-2)}{n}\right)^\circ \\ &= \frac{1}{2} n R^2 \cdot \sin\left(\frac{360}{n}\right)^\circ \text{ ตารางหน่วย} \text{-----> ④} \end{aligned}$$

ตอนที่ 2 การศึกษาสูตรการหาพื้นที่ของรูป  $n$  เหลี่ยมด้านเท่ามุมเท่า โดยที่  $n \geq 3$  ที่แนบในรูปวงกลม ใดๆ ที่มี สมการรูปแบบทั่วไปเป็น  $x^2 + y^2 + Ax + By + C = 0$

จากวงกลมใดๆ ที่มี สมการรูปแบบทั่วไปเป็น  $x^2 + y^2 + Ax + By + C = 0$

ที่มีรัศมี  $R = \frac{\sqrt{A^2 + B^2 - 4C}}{2}$  และจากสมการที่ ④ จะได้

พื้นที่ของรูป  $n$  เหลี่ยมด้านเท่ามุมเท่า โดยที่  $n \geq 3$  ที่แนบในรูปวงกลมรัศมี  $R$  ใดๆ ที่ประกอบด้วยรูปสามเหลี่ยมหน้าจั่วที่เท่ากันทุกประการ  $n$  รูป

$$\begin{aligned}
 &= \frac{1}{2}n \left( \frac{\sqrt{A^2 + B^2 - 4C}}{2} \right)^2 \cdot \sin\left(\frac{360}{n}\right)^\circ \\
 &= \frac{1}{2}n \frac{\left(\sqrt{A^2 + B^2 - 4C}\right)^2}{2^2} \cdot \sin\left(\frac{360}{n}\right)^\circ \\
 &= \frac{1}{2}n \frac{(A^2 + B^2 - 4C)}{4} \cdot \sin\left(\frac{360}{n}\right)^\circ \\
 &= \frac{1}{8}(A^2 + B^2 - 4C)n \cdot \sin\left(\frac{360}{n}\right)^\circ
 \end{aligned}$$

หรือ 
$$= \frac{n(A^2 + B^2 - 4C) \cdot \sin\left(\frac{360}{n}\right)^\circ}{8} \text{ ตารางหน่วย} \text{-----} \mathbf{\textcircled{5}}$$



## บทที่ 5

### สรุปผลการศึกษาและข้อเสนอแนะ

จากผลการดำเนินการศึกษาโครงการประเภทสร้างทฤษฎีหรือคำอธิบาย เรื่อง การหาพื้นที่รูป  $n$  เหลี่ยมด้านเท่ามุมเท่า โดยที่  $n \geq 3$  ที่แนบในวงกลมที่มีสมการรูปแบบทั่วไปเป็น  $x^2 + y^2 + Ax + By + C = 0$  ในครั้งนี้ คณะผู้ศึกษาได้ข้อสรุปของผลการศึกษาดังนี้

#### วัตถุประสงค์

1. เพื่อศึกษาสูตรการหาพื้นที่รูป  $n$  เหลี่ยมด้านเท่ามุมเท่า โดยที่  $n \geq 3$  ที่แนบในวงกลมที่มีสมการรูปแบบทั่วไปเป็น  $x^2 + y^2 + Ax + By + C = 0$

#### ผลการศึกษา

สูตรการหาพื้นที่รูป  $n$  เหลี่ยมด้านเท่ามุมเท่า โดยที่  $n \geq 3$  ที่แนบในวงกลมที่มีสมการรูปแบบทั่วไปเป็น  $x^2 + y^2 + Ax + By + C = 0$

คือ 
$$\text{พื้นที่} = \frac{1}{8}(A^2 + B^2 - 4C)n \cdot \sin\left(\frac{360}{n}\right)^{\circ} \text{ ตารางหน่วย}$$

หรือ 
$$\text{พื้นที่} = \frac{n(A^2 + B^2 - 4C) \cdot \sin\left(\frac{360}{n}\right)^{\circ}}{8} \text{ ตารางหน่วย}$$

#### ข้อเสนอแนะจากการดำเนินการศึกษาในครั้งนี้และครั้งต่อไป

1. ควรศึกษาการหาพื้นที่ในสมการรูปแบบอื่นๆ
2. ควรใช้โปรแกรมทางคณิตศาสตร์/วิศวกรรมศาสตร์/สถิติ ช่วยตรวจสอบความถูกต้องแม่นยำของสูตร

## บรรณานุกรม

มานพ ชัยดิเรก, 2553. **รากฐานคณิตศาสตร์**. ชลบุรี: ชลบุรีการพิมพ์

พรรณี ศิลปะวัฒนานันท์, 2521. **คณิตศาสตร์ฉบับสมบูรณ์ ม.3(ฉบับปรับปรุง 2533)**. กรุงเทพมหานคร: สำนักพิมพ์ฟิสิกส์เซ็นเตอร์.

ฝ่ายวิชาการ พีบีซี 2544. **ยอดคณิตศาสตร์ เรื่อง พีทำโกรัสและตรีโกณมิติ**. กรุงเทพมหานคร: สำนักพิมพ์ พีบีซี

สถาบันส่งเสริมการสอนวิทยาศาสตร์และเทคโนโลยี กระทรวงศึกษาธิการ, 2551. **คณิตศาสตร์เพิ่มเติม 2 ม.4** กรุงเทพมหานคร: โรงพิมพ์ สกสค. ลาดพร้าว.

สถาบันส่งเสริมการสอนวิทยาศาสตร์และเทคโนโลยี กระทรวงศึกษาธิการ, 2551. **คณิตศาสตร์เพิ่มเติม 1 ม.5** กรุงเทพมหานคร: โรงพิมพ์ สกสค. ลาดพร้าว.

## ภาคผนวก

ภาคผนวก ก  
ประวัติผู้ศึกษา

## ประวัติผู้ศึกษา

**ชื่อ** เด็กหญิงฐิตาภา ปกครองบ้าน  
**วันเดือนปีเกิด** วันอังคาร ที่ 21 เดือนกันยายน พ.ศ. 2547  
**ที่อยู่ปัจจุบัน** บ้านเลขที่ 75 หมู่ 11  
บ้านพระเนตร ตำบลตำ อำเภออนุบาล  
จังหวัดเชียงราย รหัสไปรษณีย์ 57340  
**ประวัติการศึกษา** จบระดับชั้นปีการศึกษาที่ 6 จากโรงเรียนอนุบาลบ้านพระเนตร  
ปัจจุบันกำลังศึกษาอยู่ใน ชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 2/11 โรงเรียนเทิงวิทยาคม

## ประวัติผู้ศึกษา

ชื่อ	เด็กหญิงเมธาวพร ประสพ
วันเดือนปีเกิด	วันพฤหัสบดี ที่ 20 เดือนเมษายน พ.ศ. 2547
ที่อยู่ปัจจุบัน	บ้านเลขที่ 209 หมู่ 4 บ้านเวียงหวาย ตำบลเม็งราย อำเภอพญาเม็งราย จังหวัดเชียงราย รหัสไปรษณีย์ 57290
ประวัติการศึกษา	จบระดับชั้นประถมศึกษาปีที่ 6 จากโรงเรียนกฤษณาทวีวิทย ปัจจุบันกำลังศึกษาอยู่ใน ชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 2/11 โรงเรียนเทิงวิทยาคม

## ประวัติผู้ศึกษา

ชื่อ	นางสาววนันสนันท์ ผัดกันต้อย
วันเดือนปีเกิด	วันอาทิตย์ ที่ 18 เดือนกรกฎาคม พ.ศ. 2546
ที่อยู่ปัจจุบัน	บ้านเลขที่ 37 หมู่ 2 บ้านตำบลเต่า ตำบลตำบลเต่า อำเภอเทิง จังหวัดเชียงราย รหัสไปรษณีย์ 57160
ประวัติการศึกษา	จบระดับชั้นประถมศึกษาปีที่ 6 จากโรงเรียนอนุบาลตำบลเต่า (ไคร้สามัคคีวิทยา) ปัจจุบันกำลังศึกษาอยู่ใน ชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 3/10 โรงเรียนเทิงวิทยาคม

ภาคผนวก ข  
เอกสารประกอบการศึกษา



Review

$x^2 + y^2 + Ax + By + C = 0 \Leftrightarrow A^2 + B^2 > 4C$  ๑

สมการวงกลม

รูปสมการทั่วไปคือ  $x^2 + y^2 + Ax + By + C = 0$

$(x^2 + Ax) + (y^2 + By) + C = 0$

$(x^2 + \frac{Ax}{2} + (\frac{A}{2})^2) - (\frac{A}{2})^2 + (y^2 + \frac{By}{2} + (\frac{B}{2})^2) - (\frac{B}{2})^2 + C = 0$

$(x + \frac{A}{2})^2 + (y + \frac{B}{2})^2 - \frac{A^2}{4} - \frac{B^2}{4} + C = 0$

$(x + \frac{A}{2})^2 + (y + \frac{B}{2})^2 = -C + \frac{A^2}{4} + \frac{B^2}{4}$

$(x + \frac{A}{2})^2 + (y + \frac{B}{2})^2 = \frac{A^2 + B^2 - 4C}{4}$

$(x + \frac{A}{2})^2 + (y + \frac{B}{2})^2 = \frac{A^2 + B^2 - 4C}{4}$

$(x + \frac{A}{2})^2 + (y + \frac{B}{2})^2 = \left( \frac{\sqrt{A^2 + B^2 - 4C}}{2} \right)^2$

$(x + \frac{A}{2})^2 + (y + \frac{B}{2})^2 = \left( \frac{\sqrt{A^2 + B^2 - 4C}}{2} \right)^2$

$\therefore$  จุดศูนย์กลาง  $(h, k) = \left( -\frac{A}{2}, -\frac{B}{2} \right)$

$r = \frac{\sqrt{A^2 + B^2 - 4C}}{2}$

ตามสมการรูปมาตรฐานคือ

$(x-h)^2 + (y-k)^2 = r^2$

ตรวจสอบความถูกต้องของคำตอบ  
เพื่อหาความถูกต้อง  
ของคำตอบ

ชื่อโดเมนของเวกเตอร์ " การหาพื้นที่รูป  $n$  ด้านด้วยพิกัดขั้ว,  $n \geq 3$ .  
 ที่แนบไปในพจนานุกรม  $x^2 + y^2 + Ax + By + C = 0$  "

### Concept ที่ นร. ควรทราบ

1) จากสมการวงกลมใหญ่  $x^2 + y^2 + Ax + By + C = 0$

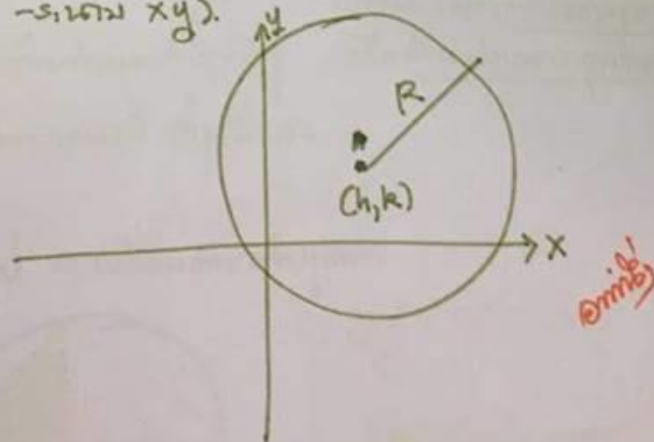
ขั้นตอนแรกคือ นร. ให้หาจุดกึ่งกลางก่อน

โดย 1.1)  $(h, k) = \left(-\frac{A}{2}, -\frac{B}{2}\right)$  (จากหน้า 12)

1.2) หา  $r$  ซึ่งในที่นี่เราจะได้มาเป็น  $R$

$$r \text{ หรือ } R = \frac{\sqrt{A^2 + B^2 - 4C}}{2}$$

1.3) sketch วงกลมวงกลม (วาดกราฟในระนาบ  $x$  และ  $y$  และเขียน  $x$  และ  $y$ ).



(3)

② Concept ต่อไปที่ศึกษาเรียนบทบทนต่อไป

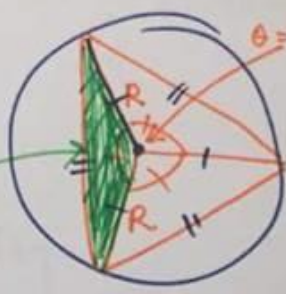
ผลรวมของมุมภายในของกลม (มุมกลม) เท่ากับ  $360^\circ$

ซึ่งถ้าเราตัดวงกลมหรือรูป  $n$  แฉกแล้วมันเท่ากับเป็นวงกลมขนาดรัศมี  $R$   
 $n > 3$

-ขนาดของ เวกเตอร์ทำตัวนี้

$n=3$  ได้รูป 3 แฉก  
ด้านเท่าๆกัน

พื้นที่ =  $3\Delta$   
รูป  $\Delta$  ด้านเท่าๆกัน



$\theta = \frac{360^\circ}{3} = 120^\circ$

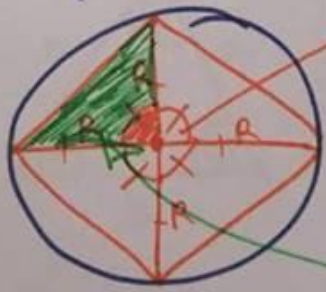
เพราะแต่ละรูปที่แบ่งออก  
รองรับมุมที่เท่ากัน  
ที่ศูนย์กลาง  $\frac{360^\circ}{n}$

และยังเป็น สามเหลี่ยมที่เท่ากันทุกประการ  
ทุกรูปแบบ ด-ม-ด

สิ่งที่ได้รูป  $\Delta$  สีเขียวเป็น สามเหลี่ยมมุมฉาก  
ปกติ เพราะ เพราะ เพราะ เพราะ เพราะ  
หรือ ด้านประกอบมุมยอด ภายนอกกับ  $R$

รูป  $n$  แฉกแล้วมันเท่ากับรูปอื่น  
ก็เช่นกันมีลักษณะเหมือนกัน  
กล่าวคือ

$n=4$  ได้รูป 4 แฉกด้านเท่าๆกัน

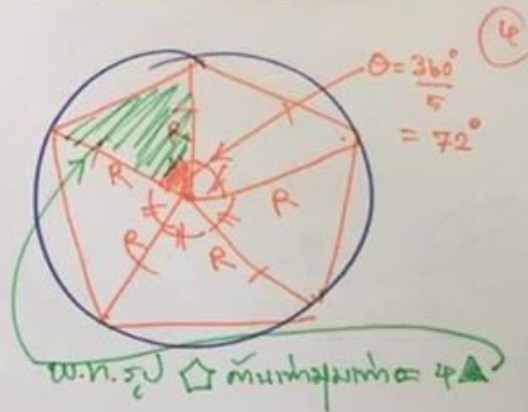


$\theta = \frac{360^\circ}{4} = 90^\circ$

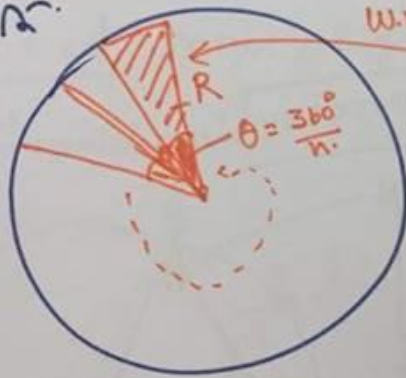
พ.ท. รูป  $\square$  ด้านเท่าๆกัน  
 $n = 4$



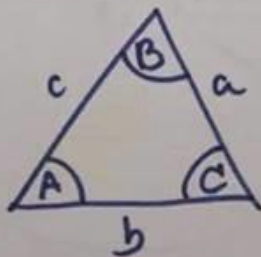
$n=5$  ၁၃၅၂ ၅ ချက်  
 အင်္ဂါအင်္ဂါ



၁၃၅၂ ချက် အင်္ဂါအင်္ဂါ  
 ချက်



**3** concept Law of Sine

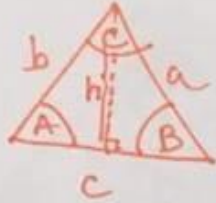


$$\frac{\sin A}{a} = \frac{\sin B}{b} = \frac{\sin C}{c}$$

အင်္ဂါ

4) Concept မျက်နှာပြင်  $\Delta$  ဇာ

5



၇၇၇  $w.n.$   $\Delta ABC = \frac{1}{2} \times (\text{အမြင့်}) \times (\text{အခြေ})$

$= \frac{1}{2} \times h \times c$  (အမြင့် h)  
 $= \frac{1}{2} \times (b \sin A) \times c$

အသုံးပြု Area of  $\Delta ABC = \frac{1}{2} hc$

$= \frac{1}{2} a \sin B \times c$

$= \frac{1}{2} ac \sin B$

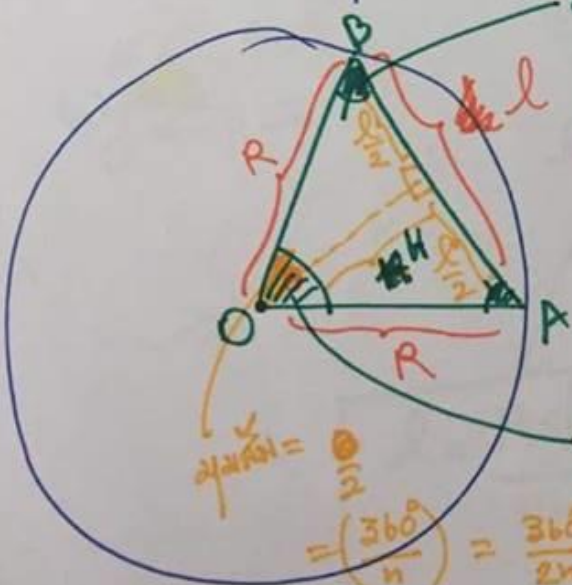
$= \frac{1}{2} bc \sin A$

အခြေအလတ်အကျယ်အဝန်း  
 အခြေအလတ်အကျယ်အဝန်း

5) Concept ကွေးကွေး  $w.n.$  ဇာ အဝန်း  $\frac{1}{n}$  ဇာ ဇာ

n အင်္ဂါအင်္ဂါ

နိဂုံး: အဝန်းကွေး  $\Sigma$  အင်္ဂါ ဇာ  $\Delta$  ဇာ  $= 180^\circ$



အင်္ဂါ  $A, B$  ( $\alpha, A=B$ )  
 $= \frac{(180^\circ - \frac{360^\circ}{n})}{2}$  ( $\Delta$  ဇာ)

$= 90^\circ - \frac{180^\circ}{n}$

$= \frac{90^\circ n - 180^\circ}{n}$

$= \frac{90(n-2)}{n}$

$\theta = \frac{360^\circ}{n}$

$= \frac{(360^\circ)}{n} = \frac{360^\circ}{2n} = \frac{180^\circ}{n}$

အဝန်း



# สำนักงานเขตพื้นที่การศึกษามัธยมศึกษา เขต ๓๖

ขอแสดงความยินดีกับนักเรียนที่ได้รับรางวัลระดับเหรียญทองชนะเลิศ

เด็กหญิงฐิตาภา ปกครองบ้าน

โรงเรียนเทิงวิทยาคม

ได้รับรางวัลระดับเหรียญทอง ชนะเลิศ

กิจกรรม การประกวดโครงงานคณิตศาสตร์ ประเภทสร้างทฤษฎีหรือคำอธิบายทางคณิตศาสตร์ ระดับชั้น ม.๑ - ม.๓

งานศิลปหัตถกรรมนักเรียนระดับมัธยมศึกษา จังหวัดเชียงราย ครั้งที่ ๖๘ ปีการศึกษา ๒๕๖๑

“วิชาการก้าวไกล ศิลปะก้าวไกล วัฒนธรรมล้ำสมัย เด็กไทยพัฒนา”  
วันที่ ๕ - ๗ กันยายน ๒๕๖๑ ณ โรงเรียนแม่สายประสิทธิ์ศาสตร์ และ โรงเรียนวัดเจ้าปลาริมวิทยาคม

(นายมนต์ชัย ปาณสุป)

ผู้อำนวยการสำนักงานเขตพื้นที่การศึกษามัธยมศึกษา เขต ๓๖



# สำนักงานเขตพื้นที่การศึกษามัธยมศึกษา เขต ๓๖

ขอแสดงความยินดีกับนักเรียนที่ได้รับรางวัลระดับเหรียญทองชนะเลิศ

นางสาวนันทน์ นันทน์ นันทน์ นันทน์

โรงเรียนเทิดทูนสถาบัน

ได้รับรางวัลระดับเหรียญทองชนะเลิศ

กิจกรรม การประกวดโครงงานคณิตศาสตร์ ประเภทสร้างทฤษฎีหรือคำอธิบายทางคณิตศาสตร์ ระดับชั้น ม.๑ - ม.๓

งานศิลปหัตถกรรมนักเรียนระดับมัธยมศึกษา จังหวัดเชียงราย ครั้งที่ ๖๘ ปีการศึกษา ๒๕๖๑

“วิชาการก้าวไกล ศิลปะก้าวไกล วัฒนธรรมล้ำสมัย เด็กไทยพัฒนา”

วันที่ ๕ - ๗ กันยายน ๒๕๖๑ ณ โรงเรียนแม่สายประสิทธิ์ศาสตร์ และ โรงเรียนวัดเจ้าฟ้าวิทยาลัย

(นายมนต์ชัย ปาณสุป)

ผู้อำนวยการสำนักงานเขตพื้นที่การศึกษามัธยมศึกษา เขต ๓๖



# สำนักงานเขตพื้นที่การศึกษามัธยมศึกษา เขต ๓๖

ขอแสดงความยินดีกับนักเรียนที่ได้รับรางวัลระดับเหรียญทองชนะเลิศ

เด็กหญิงเมชาพร ประสพ

โรงเรียนเทิงวิทยาคม

ได้รับรางวัลระดับเหรียญทอง ชนะเลิศ

กิจกรรม การประกวดโครงงานคณิตศาสตร์ ประเภทสร้างทฤษฎีหรือคำอธิบายทางคณิตศาสตร์ ระดับชั้น ม.๑ - ม.๓

งานศิลปหัตถกรรมนักเรียนระดับมัธยมศึกษา จังหวัดเชียงราย ครั้งที่ ๖๘ ปีการศึกษา ๒๕๖๑

“วิชาการก้าวซัว ศิลปะก้าวไกล วัฒนธรรมล้ำสมัย เด็กไทยขยันขันแข็ง”

วันที่ ๕ - ๗ กันยายน ๒๕๖๑ ณ โรงเรียนแม่สายประสิทธิ์ศาสตร์ และ โรงเรียนวัดเจ้าปลารัตนวิทยาคม

(นายมนต์ชัย ปาณสุป)

ผู้อำนวยการสำนักงานเขตพื้นที่การศึกษามัธยมศึกษา เขต ๓๖



เลขที่ สพม.๓๖-ป.๑๒๑๘๒/๒๕๖๑

# สำนักงานเขตพื้นที่การศึกษามัธยมศึกษา เขต ๓๖

ขอแสดงความยินดีกับนักเรียนที่ได้รับรางวัลระดับเหรียญทอง ชนะเลิศ

นางรัตติยา วงศ์วุฒิ

โรงเรียนเทิงวิทยาคม

ครูผู้สอนนักเรียน ได้รับรางวัลระดับเหรียญทอง ชนะเลิศ

กิจกรรม การประกวดโครงการคณิตศาสตร์ ประเภทสร้างทฤษฎีหรือคำอธิบายทางคณิตศาสตร์ ระดับชั้น ม.๑ - ม.๓

งานศิลปหัตถกรรมนักเรียนระดับมัธยมศึกษา จังหวัดเชียงราย ครั้งที่ ๖๘ ปีการศึกษา ๒๕๖๑

“วิชาการก้าวซึ้ง สิลปะก้าวไกล ช้ตถกรรณล้วนสัจย เด็กไทยข้ฒยว”

วันที่ ๕ - ๗ กันยายน ๒๕๖๑ ณ โรงเรียนแม่สายประสิทธิ์ศาสตร์ และ โรงเรียนวชิรวิทย์วิทยาคม

(นายมนต์ชัย ปาณสุป)

ผู้อำนวยการสำนักงานเขตพื้นที่การศึกษามัธยมศึกษา เขต ๓๖





# สำนักงานเขตพื้นที่การศึกษามัธยมศึกษา เขต ๓๖

ขอมอบเกียรติบัตรฉบับนี้ให้ไว้เพื่อแสดงว่า

นายอาหนึ่ง ชูไวย

โรงเรียนเทิงวิทยาคม

ครูผู้สอนนักเรียน ได้รับรางวัลระดับเหรียญทอง ชนะเลิศ

กิจกรรม การประกวดโครงงานคณิตศาสตร์ ประเภทสร้างทฤษฎีหรือคำอธิบายทางคณิตศาสตร์ ระดับชั้น ม.๑ - ม.๓

งานศิลปหัตถกรรมนักเรียนระดับมัธยมศึกษา จังหวัดเชียงราย ครั้งที่ ๖๘ ปีการศึกษา ๒๕๖๑

“วิชาการก้าวชัชว ศิลป์ก้าวไกล ช้ตถกรอฉลัวสฉัษ เด็กไชยฉัฉฉฉา”

วันที่ ๕ - ๗ กันยายน ๒๕๖๑ ณ โรงเรียนแม่สายประสิทธิ์ศาสตร์ และ โรงเรียนวชิรฉัฉฉฉาวิทยาคม

(นายมนต์ชัย ปาณสุป)

ผู้อำนวยการสำนักงานเขตพื้นที่การศึกษามัธยมศึกษา เขต ๓๖