แผนภาพการกระจายกำลังสองสมบูรณ์ *n* พจน์ ด้วยวิธีตารางสูตรการคูณ

The n^{th} Perfect Square Expansions Diagram by Using Multiplicative Formula Table Method

โดย

นางสาวกุลวศุ เจนการศึก

นายวัชรพงษ์ คิดดี

นางสาวจันทร์จิรา รักคำ

รายงานฉบับนี้เป็นส่วนประกอบของโครงงานคณิตศาสตร์

ประเภท การสร้างทฤษฎีหรือคำอธิบาย ระดับ มัธยมศึกษาตอนปลาย

โรงเรียนเทิงวิทยาคม ต.เวียง อ.เทิง จ.เชียงราย 57160

สำนักงานเขตพื้นที่การศึกษามัธยมศึกษา เขต 36 (เชียงราย – พะเยา)

เนื่องในงานแข่งขันทักษะความสามารถทางวิชาการของนักเรียน

ประจำปีการศึกษา 2555

โรงเรียนเทิงวิทยาคม ต.เวียง อ.เทิง จ.เชียงราย 57160

กระทรวงการศึกษาธิการ

ปีการศึกษา 2555

แผนภาพการกระจายกำลังสองสมบูรณ์ *n* พจน์ ด้วยวิธีตารางสูตรการคูณ

The n^{th} Perfect Square Expansions Diagram by Using Multiplicative Formula Table Method

โดย

นางสาวกุลวศุ เจนการศึก

นายวัชรพงษ์ คิดดี

นางสาวจันทร์จิรา รักคำ

ครูที่ปรึกษา

ครูอาหนึ่ง ชูไวย

ครูอัมพร ณ น่าน

รายงานฉบับนี้เป็นส่วนประกอบของโครงงานคณิตศาสตร์

ประเภท การสร้างทฤษฎีหรือคำอธิบาย ระดับ มัธยมศึกษาตอนปลาย

โรงเรียนเทิงวิทยาคม ต.เวียง อ.เทิง จ.เชียงราย 57160

สำนักงานเขตพื้นที่การศึกษามัธยมศึกษา เขต 36 (เชียงราย – พะเยา)

เนื่องในงานแข่งขันทักษะความสามารถทางวิชาการของนักเรียน

ประจำปีการศึกษา 2555

โครงงานประเภทการสร้างทฤษฎีหรือคำอธิบาย ระดับชั้นมัธยมศึกษาตอนปลาย
เรื่อง แผนภาพการกระจายกำลังสองสมบูรณ์ *n* พจน์ ด้วยวิธีตารางสูตรการคูณ
(The n^{th} Perfect Square Expansions Diagram by Using Multiplicative Formula Method)

คณะผู้ศึกษา

1. นางสาวกุลวศุ เจนการศึก
2. นายวัชรพงษ์ คิดดี
3. นางสาวจันทร์จิรา รักคำ

ครูที่ปรึกษา

1. ครูอาหนึ่ง ชูไวย
2. ครูอัมพร ณ น่าน

สถานศึกษา โรงเรียนเทิงวิทยาคม อำเภอเทิง จังหวัดเชียงราย 57160

ปีการศึกษา 2555

บทคัดย่อ

การศึกษาในครั้งนี้ มีจุดมุ่งหมายเพื่อศึกษาวิธีการหาสูตรทั่วไป (general term) จากการกระจายกำลังสองสมบูรณ์ *n* พจน์ ศึกษารูปการกระจายกำลังสองสมบูรณ์ *n* พจน์ ด้วยตารางสูตรการคูณแทนวิธีการใช้ทฤษฎีบทอเนกนาม ศึกษารูปแบบการนำเสนอผลการกระจายกำลังสองสมบูรณ์ *n* พจน์ ด้วยตารางสูตรการคูณ โดยใช้แผนภาพการกระจาย และศึกษาสมบัติอื่นๆ ที่ได้การกระจายกำลังสองสมบูรณ์ *n* พจน์ ซึ่งสำหรับทุกจำนวนจริง $\mathbf{x}_1,\mathbf{x}_2,\mathbf{K},\mathbf{x}_\mathbf{n}$ พบว่า สูตรทั่วไปจากการกระจาย $(\mathbf{x}_1+\mathbf{x}_2+\mathbf{K}+\mathbf{x}_\mathbf{n})^2=\sum_{\mathbf{i}=1}^{\mathbf{n}}\mathbf{x}_\mathbf{i}^2+2\sum_{1\le\mathbf{i}<\mathbf{j}}^{\mathbf{n}}\mathbf{x}_\mathbf{i}\mathbf{x}_\mathbf{j}$ โดยสามารถแสดงรูปแบบการกระจายกำลังสองสมบูรณ์ *n* พจน์ ด้วยตารางสูตรการคูณได้ และแสดงด้วยแผนภาพการกระจาย โดยที่สามารถแสดงพจน์ของการกระจายในรูปเมทริกซ์สมมาตร รูปเมทริกซ์สามเหลี่ยมบน หรือ เมทริกซ์สามเหลี่ยมล่างได้ ซึ่งจำนวนพจน์ทั้งหมดจากการกระจาย $(\mathbf{x}_1+\mathbf{x}_2+\mathbf{K}+\mathbf{x}_\mathbf{n})^2$ เท่ากับ $\binom{\mathbf{n}+1}{2}$ พจน์ และจำนวนพจน์ของ $2\mathbf{x}_\mathbf{i}\mathbf{x}_\mathbf{j}$ โดยที่ $\mathbf{i}\neq\mathbf{j}$ และ $\mathbf{i},\mathbf{j}=1,2,\mathbf{K},\mathbf{n}$ เท่ากับ $\binom{\mathbf{n}}{2}$ พจน์, $\mathbf{n}\ge 2$ และสัมพันธ์กับสัมประสิทธิ์ทวินามที่สอดคล้องกับสามเหลี่ยมปาสคาล

คำสำคัญ: แผนภาพการกระจาย, กำลังสองสมบูรณ์, สามเหลี่ยมปาสคาล, ทฤษฎีบททวินาม, ทฤษฎีบทอเนกนาม

กิตติกรรมประกาศ

การศึกษาโครงงานคณิตศาสตร์ประเภทสร้างทฤษฎีหรือคำอธิบาย เรื่อง แผนภาพการกระจายกำลังสองสมบูรณ์ n พจน์ ด้วยตารางสูตรการคูณ (The n^{th} Perfect Square Expansions Diagram by Using Multiplicative Formula Table Method) เล่มนี้ สำเร็จลุล่วงโดยได้รับความอนุเคราะห์อย่างดีจาก ครูอาหนึ่ง ชูไวย และอัมพร ณ น่าน ซึ่งได้กรุณาให้คำปรึกษาแนะนำแนวคิดวิธีการและสละเวลาอันมีค่าแก้ไขข้อบกพร่องของเนื้อหา และสำนวนภาษาด้วยความเอาใจใสอย่างดียิ่ง คณะผู้ศึกษาขอกราบขอบพระคุณเป็นอย่างสูง ณ โอกาสนี้

ขอขอบพระคุณคณะผู้บริหารโรงเรียนเทิงวิทยาคมทุกท่าน หัวหน้ากลุ่มสาระการเรียนรู้คณิตศาสตร์และคณะครูในกลุ่มสาระการเรียนรู้คณิตศาสตร์ โรงเรียนเทิงวิทยาคมทุกท่านที่ให้การสนับสนุนการดำเนินการศึกษาโครงงานเล่มนี้จนสำเร็จด้วยดี

คุณค่าและสารัตถประโยชน์ อันพึงมาจากโครงงานคณิตศาสตร์ประเภททฤษฎี หรือคำอธิบาย เรื่อง แผนภาพการกระจายกำลังสองสมบูรณ์ n พจน์ ด้วยตารางสูตรการคูณ (The n^{th} Perfect Square Expansions Diagram by Using Multiplicative Formula Table Method) ในครั้งนี้ คณะผู้ศึกษาขอน้อมเป็นเครื่องบูชาพระคุณแด่ บิดา มารดา ตลอดจนครูอาจารย์ทุกท่าน ที่ประสิทธิ์ประสาทวิชาความรู้แก่คณะผู้ศึกษาตลอดมา

คณะผู้ศึกษา

สารบัญ

สารบัญภาพ

สารบัญตาราง

ตาราง

หน้า

บทที่ 1

บทนำ

ที่มาและความสำคัญของโครงงาน

การกระจายกำลัง n สมบูรณ์ เป็นหลักการหนึ่งของพีชคณิต จากการศึกษาวิชาคณิตศาสตร์ เรื่อง กำลังสองสมบูรณ์ สามเหลี่ยมปาสคาล และสัมประสิทธิ์ทวินาม ทำให้คณะผู้ศึกษาเกิดความสนใจในเนื้อหาดังกล่าวโดยเฉพาะ เรื่อง วิธีการกระจายกำลังสองสมบูรณ์ที่มีจำนวนพจน์มากกว่าสองพจน์ ซึ่งการกระจายด้วยวิธีใช้สูตรกำลังสองสมบูรณ์ปกติ หรือใช้ทฤษฎีบทอเนกนามเป็นวิธีที่ยุ่งยากซับซ้อน ต้องใช้ความละเอียดรอบคอบสูงและใช้เวลามาก

คณะผู้ศึกษาจึงได้คิดหาวิธีการกระจายกำลังสองสมบูรณ์ n พจน์ รูปแบบใหม่ที่ได้ผลการกระจายถูกต้องดังเดิม แต่มีความรวดเร็ว ประหยัดเวลา และมีความแม่นยำสูงกว่า สามารถนำไปใช้งานได้ง่ายและมีรูปแบบการกระจายอย่างง่ายไม่ซับซ้อน ตลอดจนคิดหาวิธีนำเสนอผลการกระจายในรูปแบบแผนภาพการกระจายกำลังสองสมบูรณ์ n พจน์

คณะผู้ศึกษาจึงได้รวมกลุ่มและเลือกครูที่ปรึกษาประจำโครงงานดำเนินโครงงานคณิตศาสตร์ ประเภทการสร้างทฤษฎีหรือคำอธิบายระดับมัธยมศึกษาตอนปลาย เรื่อง แผนภาพการกระจายกำลังสองสมบูรณ์ n พจน์ ด้วยตารางสูตรการคูณ (The n^{th} Perfect Square Expansions Diagram by Using Multiplicative Formula Table Method) ขึ้นมาตามประเด็นข้างต้น

จุดประสงค์ของการศึกษา

การดำเนินการศึกษาในครั้งนี้มีจุดประสงค์เพื่อ

1. ศึกษาวิธีการหาสูตรทั่วไป (general term) จากการกระจายกำลังสองสมบูรณ์ n พจน์
2. ศึกษารูปการกระจายกำลังสองสมบูรณ์ n พจน์ ด้วยตารางสูตรการคูณแทนวิธีการใช้ทฤษฎีบทอเนกนาม
3. ศึกษารูปแบบการนำเสนอผลการกระจายกำลังสองสมบูรณ์ n พจน์ ด้วยตารางสูตรการคูณโดยใช้แผนภาพการกระจาย
4. ศึกษาสมบัติอื่นๆ ที่ได้การกระจายกำลังสองสมบูรณ์ n พจน์

ขอบเขตการศึกษา

ขอบเขตด้านเนื้อหา ศึกษาเรื่อง การกระจายกำลังสองสมบูรณ์ n พจน์

ขอบเขตด้านระยะเวลา เดือนกรกฎาคม – สิงหาคม 2555

ขอบเขตด้านสถานที่ศึกษา โรงเรียนเทิงวิทยาคม ตำบลเวียง อำเภอเทิง จังหวัดเชียงราย 57160

ประโยชน์ที่คาดว่าจะได้รับจากการศึกษา

1. ได้ความรู้เพิ่มเติมเรื่อง กำลังสองสมบูรณ์ n พจน์
2. ได้ทราบข้อกำหนดทฤษฎีแนวคิดและวิธีการสร้าง แผนภาพการกระจายกำลังสองสมบูรณ์ n พจน์
3. สามารถนำผลการศึกษาในครั้งนี้ไปประยุกต์ใช้ได้ในชีวิตประจำวัน
4. ตระหนักเห็นคุณค่าเชิงทฤษฎีของวิชาคณิตศาสตร์และเกิดทัศนคติและเจตคติที่ดีต่อวิชาคณิตศาสตร์

นิยามศัพท์เฉพาะ

การดำเนินการศึกษาโครงงานในครั้งนี้ คณะผู้ศึกษาได้นิยามศัพท์เฉาะทางคณิตศาสตร์ ดังนี้

แผนภาพการกระจาย หมายถึง แผนภาพการกระจายกำลังสองสมบูรณ์ n พจน์

ตารางสูตรการคูณ หมายถึง ตารางการคูณ ขนาดมิติ $\mathbf{n}\times\mathbf{n}$ ซึ่งมีการดำเนินการคูณดังนี้

$\times$	x_1	x_2	$\cdots$	x_{n-1}	x_n
x_1	x_1x_1	x_1x_2	$\cdots$	$x_{n-1}x_1$	x_1x_n
x_2	x_1x_2	x_2x_2	$\cdots$	$x_{n-1}x_2$	x_2x_n
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\ddots$	$\vdots$	$\vdots$
x_{n-1}	x_1x_{n-1}	x_2x_{n-1}	$\cdots$	$x_{n-1}x_{n-1}$	$x_{n-1}x_n$
x_n	x_1x_n	x_2x_n	$\cdots$	$x_{n-1}x_n$	x_nx_n

บทที่ 2
เอกสารและความรู้ที่เกี่ยวข้อง

ในการดำเนินการศึกษาโครงงานคณิตศาสตร์ประเภทสร้างทฤษฎี หรือ คำอธิบาย ระดับชั้นมัธยมศึกษาตอนปลาย เรื่อง แผนภาพการกระจายกำลังสองสมบูรณ์ n พจน์ ด้วยตารางสูตรการคูณ (The n^{th} Perfect Square Expansions Diagram by Using Multiplicative Formula Table Method) ในครั้งนี้ คณะผู้ศึกษาได้ดำเนินการศึกษาหัวข้อเอกสารและความรู้ที่เกี่ยวข้อง ดังนี้

1. ทฤษฎีบททวินาม (Binomial Theorem)
2. ทฤษฎีบทอเนกนาม (Multinomial Theorem)
3. เมทริกซ์

ซึ่งแต่ละหัวข้อมีรายละเอียดดังนี้

1. ทฤษฎีบททวินาม (Binomial Theorem)

แฟคทอเรียล (Factorial)

แฟคทอเรียลของ n เขียนแทนด้วย n! อ่านว่า แฟคทอเรียลเอ็น หรือ เอ็นแฟคทอเรียล ซึ่งมีนิยามดังนี้

นิยาม แฟคทอเรียลของ n เมื่อ n เป็นจำนวนเต็มบวก คือ $n! = n(n-1)(n-2)(n-3)........3\cdot2\cdot1$

สัมประสิทธิ์ทวินาม (Binomial Coefficient)

ถ้า n , r เป็นจำนวนเต็มบวก และ $n \geq r$ สัญลักษณ์ $\binom{n}{r}$ อ่านว่า สัมประสิทธิ์ทวินามเอ็นอาร์ หรือ เอ็น เลือก อาร์ ซึ่งมี ความหมายตามนิยามดังนี้

นิยาม เมื่อ n , r เป็นจำนวนเต็มบวก และ $0 \leq r \leq n$ แล้ว $\binom{n}{r} = \frac{n!}{r!(n-r)!}$

สามเหลี่ยมปาสคาล (Pascal's Triangle)

นักคณิตศาสตร์ชาวฝรั่งเศส ชื่อ Blaise Pascal เป็นที่ผู้นำสัมประสิทธิ์ของการกระจาย $(a+b)^n$ เมื่อ a,b เป็นจำนวนจริงใด ๆ และ n เป็นจำนวนเต็มบวกมาเขียนเรียงกันจะเป็นลักษณะรูปสามเหลี่ยม จึงเรียกการเรียงกันของค่าที่จัดเรียงนี้ว่าสามเหลี่ยมปาสคาล

จากตัวอย่างการกระจาย $(\mathbf{a}+\mathbf{b})^{\mathbf{n}}$

$(\mathbf{a}+\mathbf{b})^0 = 1$

$(\mathbf{a}+\mathbf{b})^1 = \mathbf{a}+\mathbf{b}$

$(\mathbf{a}+\mathbf{b})^2 = \mathbf{a}^2 + 2\mathbf{ab} + \mathbf{b}^2$

$(\mathbf{a}+\mathbf{b})^3 = \mathbf{a}^3 + 3\mathbf{a}^2\mathbf{b} + 3\mathbf{ab}^2 + \mathbf{b}^3$

$(\mathbf{a}+\mathbf{b})^4 = \mathbf{a}^4 + 4\mathbf{a}^3\mathbf{b} + 6\mathbf{a}^2\mathbf{b}^2 + 4\mathbf{ab}^3 + \mathbf{b}^4$

$(\mathbf{a}+\mathbf{b})^5 = \mathbf{a}^5 + 5\mathbf{a}^4\mathbf{b} + 10\mathbf{a}^3\mathbf{b}^2 + 10\mathbf{a}^2\mathbf{b}^3 + 5\mathbf{ab}^4 + \mathbf{b}^5$

ถ้านำสัมประสิทธิ์จากการกระจายข้างต้นมาเขียนเป็นรูปสามเหลี่ยมปาสคาล ได้ดังนี้

$$\binom{0}{0} \qquad\qquad (1)$$

$$\binom{1}{0} \quad \binom{1}{1} \qquad\qquad (1) \quad (1)$$

$$\binom{2}{0} \quad \binom{2}{1} \quad \binom{2}{2} \qquad\qquad (1) \quad (2) \quad (1)$$

$$\binom{3}{0} \quad \binom{3}{1} \quad \binom{3}{2} \quad \binom{3}{3} \qquad\qquad (1) \quad (3) \quad (3) \quad (1)$$

$$\binom{4}{0} \quad \binom{4}{1} \quad \binom{4}{2} \quad \binom{4}{3} \quad \binom{4}{4} \qquad (1) \quad (4) \quad (6) \quad (4) \quad (1)$$

$$\binom{5}{0} \quad \binom{5}{1} \quad \binom{5}{2} \quad \binom{5}{3} \quad \binom{5}{4} \quad \binom{5}{5} \qquad (1) \quad (5) \quad (10) \quad (10) \quad (5) \quad (1)$$

ข้อสังเกต ตัวเลขที่ปรากฏในสามเหลี่ยมปาสคาลนี้ เราสามารถสร้างต่อไปได้เรื่อยๆ ไม่มีที่สิ้นสุด โดยมีหลักและคุณสมบัติ ดังนี้

1. สามเหลี่ยมปาสคาล เป็นสามเหลี่ยมสมมาตรในแต่ละแถว จำนวนที่อยู่ห่างจากตัวริมสุด เข้ามาข้างละเท่า ๆ กัน จะมีค่าเท่ากัน

2. จำนวนแรกและจำนวนสุดท้าย ในแต่ละแถวเท่ากับ 1 เพราะ $\binom{n}{0}=\binom{n}{n}=1$

3. ในแต่ละแถวจำนวนแต่ละจำนวน ยกเว้นตัวแรกและตัวสุดท้ายจะมีค่าเท่ากับผลบวกของจำนวนสองจำนวนที่อยู่ทางขวาและทางซ้ายของจำนวนนั้น ซึ่งอยู่ในแถวบน เช่น

$$\binom{5}{2}=\binom{4}{1}+\binom{4}{2}$$

$$\binom{4}{3}=\binom{3}{2}+\binom{3}{3}$$

4. ในแถวที่ n ของสามเหลี่ยมปาสคาล จะมีจำนวนอยู่ $n+1$ จำนวน คือ

$$\binom{n}{0},\binom{n}{1},\binom{n}{2},\ldots,\binom{n}{n}$$

5. ผลบวกของจำนวนทุกจำนวนในแถวที่ n จะมีค่าเท่ากับ 2^n นั่นคือ

$$\binom{n}{0}+\binom{n}{1}+\binom{n}{2}+\ldots+\binom{n}{n}=2^n$$

นอกจากข้อสังเกต ของตัวเลขที่ปรากฏในสามเหลี่ยมแล้วเรายังมีข้อสังเกตของพจน์ต่าง ๆ ที่ได้จากการกระจาย $(a+b)^n$ เมื่อ n เป็นจำนวนเต็มบวก ดังต่อไปนี้

(1) จำนวนพจน์ของการกระจาย $(a+b)^n$ จะมีทั้งหมด $n+1$ พจน์

(2) เลขชี้กำลังของพจน์แรก (a) และพจน์หลัง (b) จะเป็นดังนี้

-พจน์แรก a จะมีเลขชี้กำลังเป็น n และ b จะมีเลขชี้กำลังเป็น 0

-พจน์ที่สอง a จะมีเลขชี้กำลังเป็น $n+1$ และ b จะมีเลขชี้กำลังเป็น 1

-พจน์ที่สาม a จะมีเลขชี้กำลังเป็น $n-2$ และ b จะมีเลขชี้กำลังเป็น 2

....

....

-และพจน์สุดท้าย คือ พจน์ที่ $n+1$ และ a จะมีเลขชี้กำลังเป็น 0 และ b จะมีเลขชี้กำลังเป็น n

นั่นคือ a จะมีเลขชี้กำลังเริ่มที่ n แล้วลดลงไปจนเป็น 0 ในพจน์ที่ $n+1$

b จะมีเลขชี้กำลังเริ่มที่ 0 แล้วเพิ่มขึ้นเรื่อย ๆ ไปจนเป็น n ในพจน์ที่ $n+1$

(3) ในแต่ละพจน์ผลบวกของเลขชี้กำลัง a และ b จะเท่ากับ n

(4) สัมประสิทธิ์ของพจน์แรกในรูปของการกระจาย คือ $\binom{n}{0} = 1$

สัมประสิทธิ์ของพจน์ที่สองในรูปของการกระจาย คือ $\binom{n}{1} = \dfrac{n!}{1!(n-1)!}$

สัมประสิทธิ์ของพจน์ที่สามในรูปของการกระจาย คือ $\binom{n}{2} = \dfrac{n!}{2!(n-2)!}$

สัมประสิทธิ์ของพจน์ที่สี่ในรูปของการกระจาย คือ $\binom{n}{3} = \dfrac{n!}{3!(n-3)!}$

(5) สัมประสิทธิ์ของพจน์แรกและพจน์สุดท้ายเป็นหนึ่งเสมอ

ทฤษฎีบทวินาม

ถ้า n และ r เป็นจำนวนเต็ม โดยที่ $0 \le r \le n$ แล้ว

$$(a+b)^n = \sum_{r=0}^{n} \binom{n}{r} a^{n-r} b^r$$

หรือ $(a+b)^n = \binom{n}{0} a^n b^{n-0} + \binom{n}{1} a^{n-1} b^1 + \binom{n}{2} a^{n-2} b^2 + \dots + \binom{n}{n} a^{n-n} b^n$

หรือ $(a+b)^n = a^n + \binom{n}{1} a^{n-1} b^1 + \binom{n}{2} a^{n-2} b^2 + \dots + b^n$

ข้อสังเกต จากการกระจายจะได้ว่า

พจน์ที่ $r+1$ จะกระจายได้เป็น $\binom{n}{r} a^{n-r} b^r$

2. ทฤษฎีบทอเนกนาม (Multinomial Theorem)

สัมประสิทธิ์ของการกระจายในรูปทั่วไปของ $(x_1 + x_2 + \mathbf{K} + x_k)^n$ เมื่อ $k, n \in$ ¢$^+$ และ $k \geq 2$

$$(x_1 + x_2 + \mathbf{K} + x_k)^n = \sum_{\substack{n_1 + n_2 + \mathbf{K} + n_k = n \\ n_1, n_2, \mathbf{K}, n_k \geq 0}} \binom{n}{n_1, n_1, \mathbf{K}, n_k} x_1^{n_1} x_2^{n_2} \cdot \mathbf{K} \cdot x_k^{n_k}$$

และสัมประสิทธิ์อเนกนาม $\binom{n}{n_1, n_1, \mathbf{K}, n_k} = \dfrac{n!}{n_1! \cdot n_2! \cdot \mathbf{K} \cdot n_k!}$

ตัวอย่าง

$$\begin{aligned}
(x_1 + x_2 + x_3)^4 &= \binom{4}{4,0,0} x_1^4 x_2^0 x_3^0 + \binom{4}{3,1,0} x_1^3 x_2^1 x_3^0 + \binom{4}{3,0,1} x_1^3 x_2^0 x_3^1 + \binom{4}{2,2,0} x_1^2 x_2^2 x_3^0 \\
&\quad + \binom{4}{2,1,1} x_1^2 x_2^1 x_3^1 + \binom{4}{2,0,2} x_1^2 x_2^0 x_3^2 + \binom{4}{1,3,0} x_1^1 x_2^3 x_3^0 + \binom{4}{1,0,3} x_1^1 x_2^0 x_3^3 \\
&\quad + \binom{4}{1,2,1} x_1^1 x_2^2 x_3^1 + \binom{4}{1,1,2} x_1^1 x_2^1 x_3^2 + \binom{4}{0,4,0} x_1^0 x_2^4 x_3^0 + \binom{4}{0,3,1} x_1^0 x_2^3 x_3^1 \\
&\quad + \binom{4}{0,2,2} x_1^0 x_2^2 x_3^2 + \binom{4}{0,1,3} x_1^0 x_2^1 x_3^3 + \binom{4}{0,0,4} x_1^0 x_2^0 x_3^4 \\
&= \binom{4}{4,0,0} x_1^4 + \binom{4}{3,1,0} x_1^3 x_2 + \binom{4}{3,0,1} x_1^3 x_3 + \binom{4}{2,2,0} x_1^2 x_2^2 \\
&\quad + \binom{4}{2,1,1} x_1^2 x_2 x_3 + \binom{4}{2,0,2} x_1^2 x_3^2 + \binom{4}{1,3,0} x_1 x_2^3 + \binom{4}{1,0,3} x_1 x_3^3 \\
&\quad + \binom{4}{1,2,1} x_1 x_2^2 x_3 + \binom{4}{1,1,2} x_1 x_2 x_3^2 + \binom{4}{0,4,0} x_2^4 + \binom{4}{0,3,1} x_2^3 x_3 \\
&\quad + \binom{4}{0,2,2} x_2^2 x_3^2 + \binom{4}{0,1,3} x_2 x_3^3 + \binom{4}{0,0,4} x_3^4 \\
&= \frac{4!}{4!} x_1^4 + \frac{4!}{3!1!} x_1^3 x_2 + \frac{4!}{3!1!} x_1^3 x_3 + \frac{4!}{2!2!} x_1^2 x_2^2 + \frac{4!}{2!1!1!} x_1^2 x_2 x_3 + \frac{4!}{2!2!} x_1^2 x_3^2 \\
&\quad + \frac{4!}{1!3!} x_1 x_2^3 + \frac{4!}{1!3!} x_1 x_3^3 + \frac{4!}{1!2!1!} x_1 x_2^2 x_3 + \frac{4!}{1!1!2!} x_1 x_2 x_3^2 + \frac{4!}{4!} x_2^4 \\
&\quad + \frac{4!}{3!1!} x_2^3 x_3 + \frac{4!}{2!2!} x_2^2 x_3^2 + \frac{4!}{1!3!} x_2 x_3^3 + \frac{4!}{4!} x_3^4 \\
&= x_1^4 + 4x_1^3 x_2 + 4x_1^3 x_3 + 6x_1^2 x_2^2 + 12x_1^2 x_2 x_3 + 6x_1^2 x_3^2 + 4x_1 x_2^3 + 4x_1 x_3^3 + \\
&\quad 12x_1 x_2^2 x_3 + 12x_1 x_2 x_3^2 + x_2^4 + 4x_2^3 x_3 + 6x_2^2 x_3^2 + 4x_2 x_3^3 + x_3^4 \\
&= x_1^4 + x_2^4 + x_3^4 + 4x_1^3 x_2 + 4x_1^3 x_3 + 4x_2^3 x_3 + 4x_1 x_2^3 + 4x_2 x_3^3 + 4x_1 x_3^3 + \\
&\quad 6x_1^2 x_2^2 + 6x_1^2 x_3^2 + 6x_2^2 x_3^2 + 12x_1^2 x_2 x_3 + 12x_1 x_2^2 x_3 + 12x_1 x_2 x_3^2
\end{aligned}$$

3. เมทริกซ์

การเขียนจำนวนตัวเลขอาจเขียนในรูปแบบเฉพาะที่ตัวเลขแต่ละตัวมีตำแหน่งแน่ชัด เป็นกลุ่มเรียงแถวและหลักอย่างเป็นระเบียบ เรียกกลุ่มตัวเลขนี้ว่าเมทริกซ์ สามารถสร้างให้กระทำเป็นระบบสอดคล้องกันโดยกำหนดคุณสมบัติและการกระทำได้ด้วย การบวก ลบ คูณและส่วนกลับ นอกจากนี้นำไปคำนวณในลักษณะเฉพาะที่เรียกว่า ดีเทอร์มิแนนท์ ปฏิบัติการเชื่อมโยงกันและนำไปประยุกต์ใช้แก้ระบบสมการเชิงเส้นได้อย่างมีประสิทธิภาพ

เมทริกซ์จัตุรัส คือ เมทริกซ์ที่มีจำนวนแถวและจำนวนหลักเท่ากัน หรือเมทริกซ์ที่มีมิติ $\mathbf{n \times n}$

เช่น $\begin{bmatrix} 2 & 3 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$ **;** $\begin{bmatrix} 1 & 0 & 3 \\ 2 & 5 & 2 \\ 3 & 4 & 3 \end{bmatrix}$

เมทริกซ์สมมาตร (symmetric matrices) คือเมทริกซ์จัตุรัสที่มีตัวเลขที่ไม่อยู่ในแนวเส้นทแยงมุมมีค่าเท่ากันหรือเมทริกซ์ที่มีทรานสโพสของเมทริกซ์เท่ากับเมทริกซ์นั้น $(A = A^t)$ เช่น $\begin{bmatrix} 2 & 14 & 15 \\ 14 & -1 & 18 \\ 15 & 18 & 1 \end{bmatrix}$

เมทริกซ์แถว คือ เมทริกซ์ที่มีแถวเดียว เช่น $\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \end{bmatrix}$

เมทริกซ์หลัก คือ คือ เมทริกซ์ที่มีหลักเดียว เช่น $\begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 5 \end{bmatrix}$

เมทริกซ์ศูนย์ คือ เมทริกซ์ที่มีสมาชิกทุกตัวเป็นศูนย์ เช่น $\begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$ เขียนแทนด้วย $\underset{-}{0}$ เรียกเมทริกซ์ศูนย์ว่า เอกลักษณ์การบวกของเมทริกซ์

เมทริกซ์เอกลักษณ์ คือ เมทริกซ์จัตุรัสที่มีสมาชิกในแนวเส้นทแยงมุมหลักเป็น 1 และสมาชิกตัวอื่นๆ เป็น 0 หมด เช่น $\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$

นิยาม ถ้า $\mathbf{A} = [\mathbf{a_{ij}}]_{\mathbf{m \times n}}$ **,** $\mathbf{B} = [\mathbf{b_{ij}}]_{\mathbf{n \times p}}$ ผลคูณของ $\mathbf{A \times B}$ หรือ AB คือ เมทริกซ์

$\mathbf{C} = [\mathbf{c_{ij}}]_{\mathbf{m \times p}}$ โดยที่ $\mathbf{c_{ij}} = \mathbf{a_{i1} b_{1j} + a_{i2} b_{2j} + \; . \; . \; . + a_{in} b_{nj}}$

บทที่ 3
วิธีการดำเนินโครงงาน

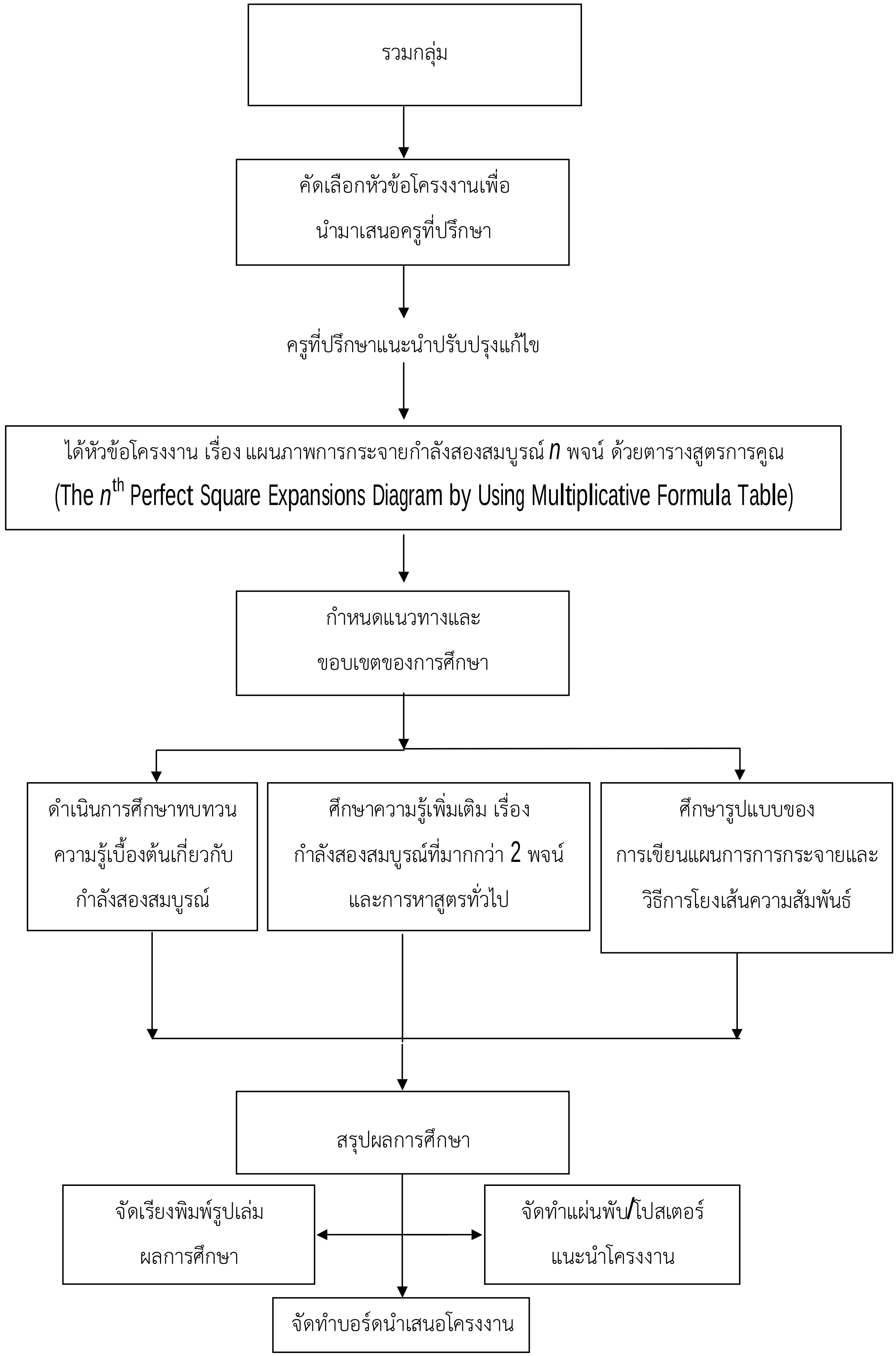
การดำเนินการศึกษาโครงงานคณิตศาสตร์ประเภทสร้างทฤษฎีหรือคำอธิบาย เรื่อง แผนภาพการกระจายกำลังสองสมบูรณ์ n พจน์ ด้วยตารางสูตรการคูณ (The n^{th} Perfect Square Expansions Diagram by Using Multiplicative Formula Table Method) ในครั้งนี้คณะผู้ศึกษาได้ดำเนินการตามขั้นตอนการศึกษาโครงงานเชิงทฤษฎีหรือคำอธิบายดังนี้

ตารางที่ 1 แสดงขั้นตอนการดำเนินการศึกษาโครงงาน

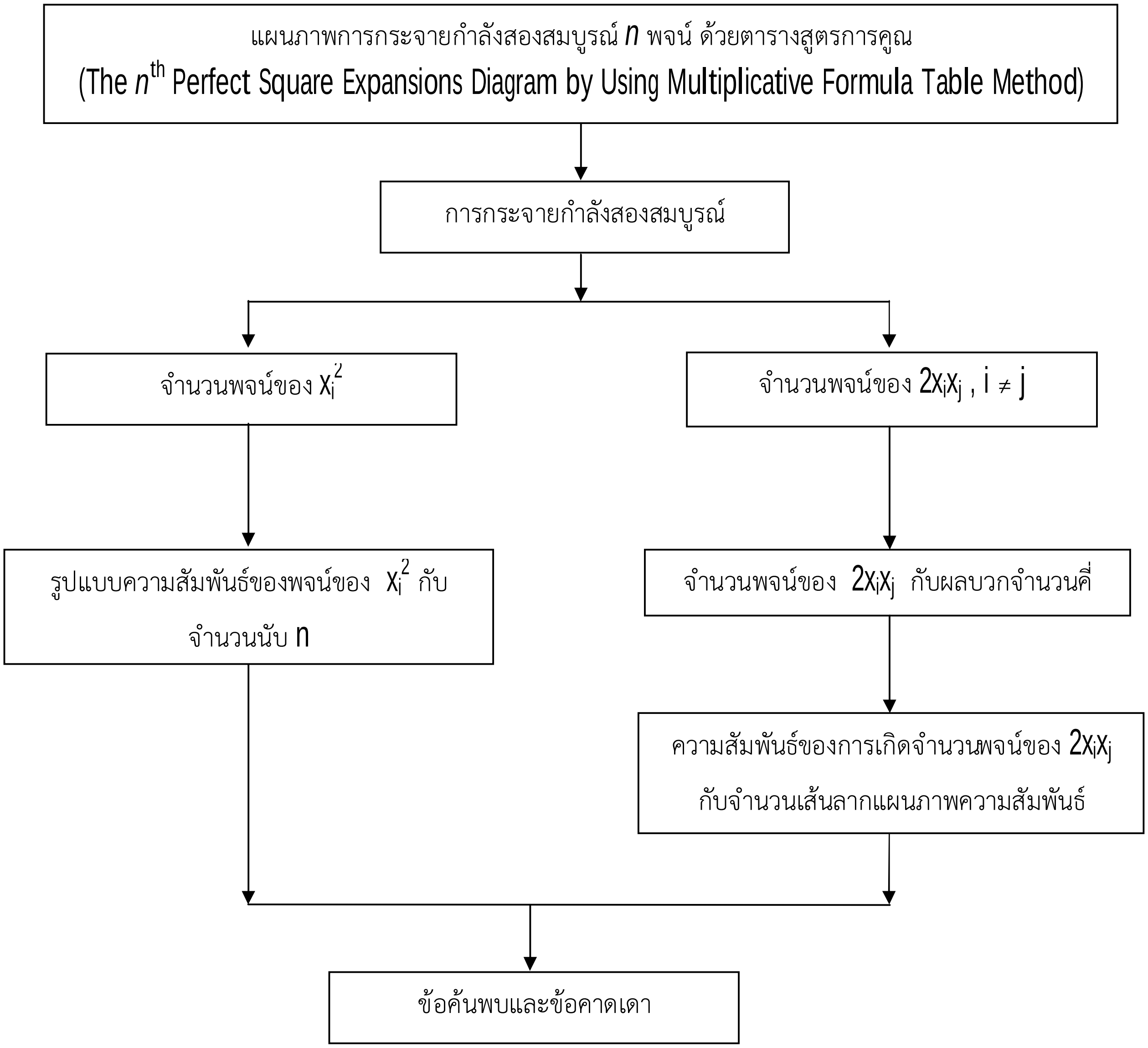
ที่	วัน เดือน ปี	กิจกรรม การดำเนินการศึกษา	ผู้รับผิดชอบ
1	14-18 มิ.ย. 2555	คัดเลือกหัวข้อโครงงาน	คณะผู้ศึกษาทุกคน
2	21-25 มิ.ย. 2555	ส่งหัวข้อโครงงานปรึกษาครูที่ปรึกษา	คณะผู้ศึกษาทุกคน
3	28 มิ.ย. – 2 ก.ค. 2555	กำหนดแนวทางและขอบเขตของการศึกษาร่วมกับครูที่ปรึกษา	คณะผู้ศึกษาทุกคนและครูที่ปรึกษา
4	5-9 ก.ค. 2555	ทบทวนความรู้เบื้องต้นเกี่ยวกับรูปแบบการกระจายของกำลังสองสัมบูรณ์ 2 พจน์	คณะผู้ศึกษาทุกคนและครูที่ปรึกษา
5	12-16 ก.ค. 2555	ศึกษาความรู้เรื่อง สามเหลี่ยมปาสคาลเบื้องต้น	คณะผู้ศึกษาทุกคนและครูที่ปรึกษา
6	19-23 ก.ค. 2555	ศึกษารูปแบบของ การกระจายกำลังสองสมบูรณ์ n พจน์	คณะผู้ศึกษาทุกคนและครูที่ปรึกษา
7	26-30 ก.ค. 2555	สรุปการศึกษารวบรวมข้อค้นพบความรู้ ทฤษฎี หลักการ แนวคิด ระเบียบวิธี และผลลัพธ์จากการศึกษาต่อครูที่ปรึกษา เพื่อรับการวิพากษ์และแก้ไขจากครูที่ปรึกษา	คณะผู้ศึกษาทุกคน
8	2-6 ส.ค. 2555	จัดพิมพ์รูปเล่มโครงงาน	คณะผู้ศึกษาทุกคน
9	9-13 ส.ค. 2555	จัดทำบอร์ดนำเสนอโครงงานและแผ่นพับแนะนำโครงงาน	คณะผู้ศึกษาทุกคน
10	9-13 ส.ค. 2555	จัดทำแผ่นโปสเตอร์นำเสนอโครงงาน/แนะนำโครงงาน	คณะผู้ศึกษาทุกคน

ตารางที่ 2 รายละเอียดการศึกษาโครงงานเชิงทฤษฎี เรื่อง แผนภาพการกระจายกำลังสองสมบูรณ์ n พจน์ ด้วยตารางสูตรการคูณ (The n^{th} Perfect Square Expansions Diagram by Using Multiplicative Formula Table Method)

ที่	หัวข้อการศึกษา	รายละเอียดของการศึกษา
1	ความรู้พื้นฐานเกี่ยวกับการกระจายของกำลังสองสัมบูรณ์	ความรู้พื้นฐานทั้งหมดของการกระจายของกำลังสองสัมบูรณ์
2	ความรู้พื้นฐานเกี่ยวกับสามเหลี่ยมปาสคาล	นิยาม ความหมาย และการประยุกต์ใช้ของสามเหลี่ยมปาสคาล
3	รูปแบบวิธีการกระจายของกำลังสองสัมบูรณ์ n พจน์	รายละเอียดของ การเกิด รูปแบบ และความสัมพันธ์ของการกระจายของกำลังสองสัมบูรณ์ n พจน์
4	รูปแบบการสร้างแผนภาพการกระจาย	ศึกษารูปแบบการสร้างแผนภาพการกระจายจากการกระจายกำลังสองสัมบูรณ์แบบ n พจน์
5	การสรุปผลการศึกษา	สรุปผลการศึกษาตามรายละเอียดดังหัวข้อ 2-4



ภาพที่ 1 แผนผังแสดงขั้นตอนการดำเนินการศึกษาโครงงาน



ภาพที่ 2 แผนผังแสดงขั้นตอนการดำเนินการศึกษาโครงงานคณิตศาสตร์เชิงการสร้างทฤษฎีหรือคำอธิบาย เรื่อง แผนภาพการกระจายกำลังสองสมบูรณ์ n พจน์ ด้วยตารางสูตรการคูณ (The n^{th} Perfect Square Expansions Diagram by Using Multiplicative Formula Table Method)

บทที่ 4

ผลการศึกษา

จากผลการดำเนินการศึกษาโครงงานประเภทสร้างทฤษฎีหรือคำอธิบาย เรื่อง แผนภาพการกระจายกำลังสองสมบูรณ์ n พจน์ ด้วยตารางสูตรการคูณ (The n^{th} Perfect Square Expansions Diagram by Using Multiplicative Formula Table Method) ในครั้งนี้ คณะผู้ศึกษาได้ผลการศึกษาตามลำดับข้อค้นพบดังนี้

ตอนที่ 1 วิธีการหาสูตรทั่วไป (general term) จากการกระจายกำลังสองสมบูรณ์ n พจน์

โดยปกติการกระจายกำลังสองสมบูรณ์ สำหรับทุกจำนวนจริง $\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2$ สามารถดำเนินการได้ดังนี้

$(\mathbf{x}_1+\mathbf{x}_2)^2 = \mathbf{x}_1^2 + 2\mathbf{x}_1\mathbf{x}_2 + \mathbf{x}_2^2 = \mathbf{x}_1^2 + \mathbf{x}_2^2 + 2\mathbf{x}_1\mathbf{x}_2$ และ

$(\mathbf{x}_1-\mathbf{x}_2)^2 = \mathbf{x}_1^2 - 2\mathbf{x}_1\mathbf{x}_2 + \mathbf{x}_2^2 = \mathbf{x}_1^2 + \mathbf{x}_2^2 - 2\mathbf{x}_1\mathbf{x}_2$

ในทำนองเดียวกัน

$$
\begin{aligned}
(\mathbf{x}_1+\mathbf{x}_2+\mathbf{x}_3)^2 &= \left((\mathbf{x}_1+\mathbf{x}_2)+\mathbf{x}_3\right)^2 \\
&= (\mathbf{x}_1+\mathbf{x}_2)^2 + 2(\mathbf{x}_1+\mathbf{x}_2)\mathbf{x}_3 + \mathbf{x}_3^2 \\
&= (\mathbf{x}_1^2+\mathbf{x}_2^2+2\mathbf{x}_1\mathbf{x}_2) + \mathbf{x}_3^2 + 2(\mathbf{x}_1+\mathbf{x}_2)\mathbf{x}_3 \\
&= (\mathbf{x}_1^2+\mathbf{x}_2^2+2\mathbf{x}_1\mathbf{x}_2) + \mathbf{x}_3^2 + 2\mathbf{x}_1\mathbf{x}_3 + 2\mathbf{x}_2\mathbf{x}_3 \\
&= \mathbf{x}_1^2+\mathbf{x}_2^2+\mathbf{x}_3^2+2\mathbf{x}_1\mathbf{x}_2+2\mathbf{x}_1\mathbf{x}_3+2\mathbf{x}_2\mathbf{x}_3
\end{aligned}
$$

ซึ่งสำหรับทุกจำนวนจริง $\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2, \mathbf{x}_3, \ldots, \mathbf{x}_\mathbf{n}$ จะได้ว่า

$$
\begin{aligned}
(\mathbf{x}_1+\mathbf{x}_2+\mathbf{x}_3+\ldots+\mathbf{x}_{\mathbf{n}-1}+\mathbf{x}_\mathbf{n})^2 = \; & (\mathbf{x}_1^2+\mathbf{x}_2^2+\mathbf{x}_3^2+\ldots+\mathbf{x}_{\mathbf{n}-1}^2+\mathbf{x}_\mathbf{n}^2) + \\
& (2\mathbf{x}_1\mathbf{x}_2+2\mathbf{x}_1\mathbf{x}_3+2\mathbf{x}_1\mathbf{x}_4+\ldots+2\mathbf{x}_1\mathbf{x}_{\mathbf{n}-1}+2\mathbf{x}_1\mathbf{x}_\mathbf{n}) + \\
& (2\mathbf{x}_2\mathbf{x}_3+2\mathbf{x}_2\mathbf{x}_4+2\mathbf{x}_2\mathbf{x}_5+\ldots+2\mathbf{x}_2\mathbf{x}_{\mathbf{n}-1}+2\mathbf{x}_2\mathbf{x}_\mathbf{n}) + \\
& (2\mathbf{x}_3\mathbf{x}_4+2\mathbf{x}_3\mathbf{x}_5+2\mathbf{x}_3\mathbf{x}_6+\ldots+2\mathbf{x}_3\mathbf{x}_{\mathbf{n}-1}+2\mathbf{x}_3\mathbf{x}_\mathbf{n}) + \ldots + \\
& (2\mathbf{x}_{\mathbf{n}-3}\mathbf{x}_{\mathbf{n}-2}+2\mathbf{x}_{\mathbf{n}-3}\mathbf{x}_{\mathbf{n}-1}+2\mathbf{x}_{\mathbf{n}-3}\mathbf{x}_\mathbf{n}) + (2\mathbf{x}_{\mathbf{n}-2}\mathbf{x}_{\mathbf{n}-1}+2\mathbf{x}_{\mathbf{n}-2}\mathbf{x}_\mathbf{n}) + \\
& (2\mathbf{x}_{\mathbf{n}-1}\mathbf{x}_\mathbf{n}) \\
= \; & (\mathbf{x}_1^2+\mathbf{x}_2^2+\mathbf{x}_3^2+\ldots+\mathbf{x}_{\mathbf{n}-1}^2+\mathbf{x}_\mathbf{n}^2) + \\
& [2(\mathbf{x}_1\mathbf{x}_2+\mathbf{x}_1\mathbf{x}_3+\mathbf{x}_1\mathbf{x}_4+\ldots+\mathbf{x}_1\mathbf{x}_{\mathbf{n}-1}+\mathbf{x}_1\mathbf{x}_\mathbf{n}) + \\
& 2(\mathbf{x}_2\mathbf{x}_3+\mathbf{x}_2\mathbf{x}_4+\mathbf{x}_2\mathbf{x}_5+\ldots+\mathbf{x}_2\mathbf{x}_{\mathbf{n}-1}+\mathbf{x}_2\mathbf{x}_\mathbf{n}) + \\
& 2(\mathbf{x}_3\mathbf{x}_4+\mathbf{x}_3\mathbf{x}_5+\mathbf{x}_3\mathbf{x}_6+\ldots+\mathbf{x}_3\mathbf{x}_{\mathbf{n}-1}+\mathbf{x}_3\mathbf{x}_\mathbf{n}) + \ldots + \\
& 2(\mathbf{x}_{\mathbf{n}-3}\mathbf{x}_{\mathbf{n}-2}+\mathbf{x}_{\mathbf{n}-3}\mathbf{x}_{\mathbf{n}-1}+\mathbf{x}_{\mathbf{n}-3}\mathbf{x}_\mathbf{n}) + 2(\mathbf{x}_{\mathbf{n}-2}\mathbf{x}_{\mathbf{n}-1}+\mathbf{x}_{\mathbf{n}-2}\mathbf{x}_\mathbf{n}) + \\
& 2\mathbf{x}_{\mathbf{n}-1}\mathbf{x}_\mathbf{n}]
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
= \quad & (x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 + \mathrm{K} + x_{n-1}^2 + x_n^2) + \\
& 2[(x_1x_2 + x_1x_3 + x_1x_4 + \mathrm{K} + x_1x_{n-1} + x_1x_n) + \\
& (x_2x_3 + x_2x_4 + x_2x_5 + \mathrm{K} + x_2x_{n-1} + x_2x_n) + \\
& (x_3x_4 + x_3x_5 + x_3x_6 + \mathrm{K} + x_3x_{n-1} + x_3x_n) + \mathrm{K} + \\
& (x_{n-3}x_{n-2} + x_{n-3}x_{n-1} + x_{n-3}x_n) + (x_{n-2}x_{n-1} + x_{n-2}x_n) + x_{n-1}x_n]
\end{aligned}
$$

ดังนั้น $(x_1 + x_2 + x_3 + \mathrm{K} + x_{n-1} + x_n)^2 = \sum_{i=1}^{n} x_i^2 + 2\sum_{1\le i<j}^{n} x_i x_j$

นั่นคือ สูตรทั่วไปของ $(x_1 + x_2 + x_3 + \mathrm{K} + x_{n-1} + x_n)^2 = \sum_{i=1}^{n} x_i^2 + 2\sum_{1\le i<j}^{n} x_i x_j$

ตอนที่ 2 การศึกษารูปการกระจายกำลังสองสมบูรณ์ n พจน์ ด้วยตารางสูตรการคูณแทนวิธีการใช้ทฤษฎีบทอเนกนาม

เราทราบว่า สำหรับทุกจำนวนจริง $x_1, x_2, x_3, \mathrm{K}, x_n$ โดยทฤษฎีบทอเนกนาม จะได้ว่า

$$
(x_1 + x_2 + \mathrm{K} + x_k)^n = \sum_{\substack{n_1+n_2+\mathrm{K}+n_k=n \\ n_1,n_2,\mathrm{K},n_k \ge 0}} \binom{n}{n_1, n_1, \mathrm{K}, n_k} x_1^{n_1} x_2^{n_2} \cdot \mathrm{K} \cdot x_k^{n_k}
$$

ซึ่งวิธีการดังกล่าวมีขั้นตอนที่สลับซับซ้อน ต้องอาศัยความละเอียดรอบคอบค่อนข้างสูง เกิดข้อผิดพลาดได้ง่าย และจากสูตรทั่วไปของ $(x_1 + x_2 + x_3 + \mathrm{K} + x_{n-1} + x_n)^2 = \sum_{i=1}^{n} x_i^2 + 2\sum_{1\le i<j}^{n} x_i x_j$ เราสามารถกระจายแยกกลุ่มของพจน์ต่างๆ ได้ดังนี้

กลุ่มที่ 1 กลุ่มพจน์ $\sum_{i=1}^{n} x_i^2 = x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 + \mathrm{K} + x_{n-1}^2 + x_n^2$

กลุ่มที่ 2 กลุ่มพจน์ $2\sum_{1\le i<j}^{n} x_i x_j$ ซึ่ง

$$
\begin{aligned}
2\sum_{1\le i<j}^{n} x_i x_j = \quad & (2x_1x_2 + 2x_1x_3 + 2x_1x_4 + \mathrm{K} + 2x_1x_{n-1} + 2x_1x_n) + \\
& (2x_2x_3 + 2x_2x_4 + 2x_2x_5 + \mathrm{K} + 2x_2x_{n-1} + 2x_2x_n) + \\
& (2x_3x_4 + 2x_3x_5 + 2x_3x_6 + \mathrm{K} + 2x_3x_{n-1} + 2x_3x_n) + \mathrm{K} + \\
& (2x_{n-3}x_{n-2} + 2x_{n-3}x_{n-1} + 2x_{n-3}x_n) + (2x_{n-2}x_{n-1} + 2x_{n-2}x_n) + 2x_{n-1}x_n \\
= \quad & (x_1x_2 + x_1x_3 + x_1x_4 + \mathrm{K} + x_1x_{n-1} + x_1x_n) + \\
& (x_1x_2 + x_1x_3 + x_1x_4 + \mathrm{K} + x_1x_{n-1} + x_1x_n) + \\
& (x_2x_3 + x_2x_4 + x_2x_5 + \mathrm{K} + x_2x_{n-1} + x_2x_n) + \\
& (x_2x_3 + x_2x_4 + x_2x_5 + \mathrm{K} + x_2x_{n-1} + x_2x_n) + \\
& (x_3x_4 + x_3x_5 + x_3x_6 + \mathrm{K} + x_3x_{n-1} + x_3x_n) +
\end{aligned}
$$

$$(x_3x_4 + x_3x_5 + x_3x_6 + \cdots + x_3x_{n-1} + x_3x_n) + \cdots +$$
$$(x_{n-3}x_{n-2} + x_{n-3}x_{n-1} + x_{n-3}x_n) + (x_{n-3}x_{n-2} + x_{n-3}x_{n-1} + x_{n-3}x_n) +$$
$$(x_{n-2}x_{n-1} + x_{n-2}x_n) + (x_{n-2}x_{n-1} + x_{n-2}x_n) + x_{n-1}x_n + x_{n-1}x_n$$

คณะผู้ศึกษาจึงได้ออกแบบตารางสูตรการคูณเพื่อช่วยแก้ปัญหาการกระจายพจน์ ดังนี้

$\times$	x_1	x_2	x_3	x_4	$\cdots$	x_{n-3}	x_{n-2}	x_{n-1}	x_n
x_1	x_1x_1	x_1x_2	x_1x_3	x_1x_4	$\cdots$	x_1x_{n-3}	x_1x_{n-2}	x_1x_{n-1}	x_1x_n
x_2	x_2x_1	x_2x_2	x_2x_3	x_2x_4	$\cdots$	x_2x_{n-3}	x_2x_{n-2}	x_2x_{n-1}	x_2x_n
x_3	x_3x_1	x_3x_2	x_3x_3	x_3x_4	$\cdots$	x_3x_{n-3}	x_3x_{n-2}	x_3x_{n-1}	x_3x_n
x_4	x_4x_1	x_4x_2	x_4x_3	x_4x_4	$\cdots$	x_4x_{n-3}	x_4x_{n-2}	x_4x_{n-1}	x_4x_n
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\ddots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$
x_{n-3}	$x_{n-3}x_1$	$x_{n-3}x_2$	$x_{n-3}x_3$	$x_{n-3}x_4$	$\cdots$	$x_{n-3}x_{n-3}$	$x_{n-3}x_{n-2}$	$x_{n-3}x_{n-1}$	$x_{n-3}x_n$
x_{n-2}	$x_{n-2}x_1$	$x_{n-2}x_2$	$x_{n-2}x_3$	$x_{n-2}x_4$	$\cdots$	$x_{n-2}x_{n-3}$	$x_{n-2}x_{n-2}$	$x_{n-2}x_{n-1}$	$x_{n-2}x_n$
x_{n-1}	$x_{n-1}x_1$	$x_{n-1}x_2$	$x_{n-1}x_3$	$x_{n-1}x_4$	$\cdots$	$x_{n-1}x_{n-3}$	$x_{n-1}x_{n-2}$	$x_{n-1}x_{n-1}$	$x_{n-1}x_n$
x_n	x_nx_1	x_nx_2	x_nx_3	x_nx_4	$\cdots$	x_nx_{n-3}	x_nx_{n-4}	x_nx_{n-1}	x_nx_n

ซึ่งเขียนใหม่ได้

$\times$	x_1	x_2	x_3	x_4	$\cdots$	x_{n-3}	x_{n-2}	x_{n-1}	x_n
x_1	x_1^2	x_1x_2	x_1x_3	x_1x_4	$\cdots$	x_1x_{n-3}	x_1x_{n-2}	x_1x_{n-1}	x_1x_n
x_2	x_1x_2	x_2^2	x_2x_3	x_2x_4	$\cdots$	x_2x_{n-3}	x_2x_{n-2}	x_2x_{n-1}	x_2x_n
x_3	x_1x_3	x_2x_3	x_3^2	x_3x_4	$\cdots$	x_3x_{n-3}	x_3x_{n-2}	x_3x_{n-1}	x_3x_n
x_4	x_1x_4	x_2x_4	x_3x_4	x_4^2	$\cdots$	x_4x_{n-3}	x_4x_{n-2}	x_4x_{n-1}	x_4x_n
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\ddots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$
x_{n-3}	x_1x_{n-3}	x_2x_{n-3}	x_3x_{n-3}	x_4x_{n-3}	$\cdots$	x_{n-3}^2	$x_{n-3}x_{n-2}$	$x_{n-3}x_{n-1}$	$x_{n-3}x_n$
x_{n-2}	x_1x_{n-2}	x_2x_{n-2}	x_3x_{n-2}	x_4x_{n-2}	$\cdots$	$x_{n-3}x_{n-2}$	x_{n-2}^2	$x_{n-2}x_{n-1}$	$x_{n-2}x_n$
x_{n-1}	x_1x_{n-1}	x_2x_{n-1}	x_3x_{n-1}	x_4x_{n-1}	$\cdots$	$x_{n-3}x_{n-1}$	$x_{n-2}x_{n-1}$	x_{n-1}^2	$x_{n-1}x_n$
x_n	x_1x_n	x_2x_n	x_3x_n	x_4x_n	$\cdots$	$x_{n-3}x_n$	$x_{n-2}x_n$	$x_{n-1}x_n$	x_n^2

ซึ่งจากตารางสูตรการคูณ พบว่า

ผลบวกของทุกพจน์ $=$ $(x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 + \cdots + x_{n-1}^2 + x_n^2) +$

$$(x_1x_2 + x_1x_3 + x_1x_4 + \cdots + x_1x_{n-1} + x_1x_n) +$$
$$(x_1x_2 + x_1x_3 + x_1x_4 + \cdots + x_1x_{n-1} + x_1x_n) +$$
$$(x_2x_3 + x_2x_4 + x_2x_5 + \cdots + x_2x_{n-1} + x_2x_n) +$$
$$(x_2x_3 + x_2x_4 + x_2x_5 + \cdots + x_2x_{n-1} + x_2x_n) +$$
$$(x_3x_4 + x_3x_5 + x_3x_6 + \cdots + x_3x_{n-1} + x_3x_n) +$$

$$\begin{aligned}
&(x_3x_4 + x_3x_5 + x_3x_6 + \cdots + x_3x_{n-1} + x_3x_n) + \cdots + \\
&(x_{n-3}x_{n-2} + x_{n-3}x_{n-1} + x_{n-3}x_n) + (x_{n-3}x_{n-2} + x_{n-3}x_{n-1} + x_{n-3}x_n) + \\
&(x_{n-2}x_{n-1} + x_{n-2}x_n) + (x_{n-2}x_{n-1} + x_{n-2}x_n) + x_{n-1}x_n + x_{n-1}x_n \\
= \;&(x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 + \cdots + x_{n-1}^2 + x_n^2) + \\
&(2x_1x_2 + 2x_1x_3 + 2x_1x_4 + \cdots + 2x_1x_{n-1} + 2x_1x_n) + \\
&(2x_2x_3 + 2x_2x_4 + 2x_2x_5 + \cdots + 2x_2x_{n-1} + 2x_2x_n) + \\
&(2x_3x_4 + 2x_3x_5 + 2x_3x_6 + \cdots + 2x_3x_{n-1} + 2x_3x_n) + \cdots + \\
&(2x_{n-3}x_{n-2} + 2x_{n-3}x_{n-1} + 2x_{n-3}x_n) + (2x_{n-2}x_{n-1} + 2x_{n-2}x_n) + 2x_{n-1}x_n \\
= \;&\sum_{i=1}^{n} x_i^2 + 2\sum_{1\le i<j}^{n} x_ix_j \\
= \;&(x_1 + x_2 + x_3 + \cdots + x_{n-1} + x_n)^2
\end{aligned}$$

ซึ่งสรุปได้ว่า ผลบวกของทุกพจน์จากตารางสูตรการคูณ

มีค่าเท่ากับ $\sum_{i=1}^{n} x_i^2 + 2\sum_{1\le i<j}^{n} x_ix_j = (x_1 + x_2 + x_3 + \cdots + x_{n-1} + x_n)^2$

ตอนที่ 3 วิธีการสร้างรูปแบบการนำเสนอผลการกระจายกำลังสองสมบูรณ์ n พจน์ ด้วยตารางสูตรการคูณโดยใช้แผนภาพการกระจาย

จากตอนที่ 2 คณะผู้ศึกษาได้คิดแผนภาพการกระจายอย่างง่ายแทนผลบวกทุกพจน์ของ $(x_1 + x_2 + x_3 + \cdots + x_{n-1} + x_n)^2$ จากการกระจายกำลังสองสมบูรณ์ n พจน์ โดยการใช้ตารางสูตรการคูณดังนี้

$$(x_1 + x_2 + x_3 + \cdots + x_{n-1} + x_n)^2 = \begin{array}{ccccccccc}
x_1^2 & 2x_1x_2 & 2x_1x_3 & 2x_1x_4 & \cdots & 2x_1x_{n-3} & 2x_1x_{n-2} & 2x_1x_{n-1} & 2x_1x_n \\
x_2^2 & & 2x_2x_3 & 2x_2x_4 & \cdots & 2x_2x_{n-3} & 2x_2x_{n-2} & 2x_2x_{n-1} & 2x_2x_n \\
x_3^2 & & & 2x_3x_4 & \cdots & 2x_3x_{n-3} & 2x_3x_{n-2} & 2x_3x_{n-1} & 2x_3x_n \\
x_4^2 & & & & \cdots & 2x_4x_{n-3} & 2x_4x_{n-2} & 2x_4x_{n-1} & 2x_4x_n \\
\vdots & & & & & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots \\
x_{n-3}^2 & & & & & & 2x_{n-3}x_{n-2} & 2x_{n-2}x_{n-1} & 2x_{n-3}x_n \\
x_{n-2}^2 & & & & & & & 2x_{n-2}x_{n-1} & 2x_{n-2}x_n \\
x_{n-1}^2 & & & & & & & & 2x_{n-1}x_n \\
x_n^2 & & & & & & & &
\end{array}$$

ตอนที่ 4 สมบัติอื่นๆ ที่ได้การกระจายกำลังสองสมบูรณ์ n พจน์

4.1 จากตอนที่ 3 จำนวนพจน์ที่แตกต่างกันทั้งหมดจากการกระจาย $(\mathbf{x}_1+\mathbf{x}_2+\ldots+\mathbf{x}_\mathbf{n})^2$ เท่ากับ $\binom{\mathbf{n}+1}{2}$ พจน์

4.2 จากตอนที่ 3 จำนวนพจน์ที่แตกต่างกันทั้งหมดของ $\mathbf{x}_\mathbf{i}^2$ มีจำนวน $\mathbf{n}$ พจน์ โดยที่ $\mathbf{i}=1,2,\ldots,\mathbf{n}$

4.3 จากตอนที่ 3 จำนวนพจน์ของ $2\mathbf{x}_\mathbf{i}\mathbf{x}_\mathbf{j}$ โดยที่ $\mathbf{i}\neq\mathbf{j}$ และ $\mathbf{i},\mathbf{j}=1,2,\ldots,\mathbf{n}$ เท่ากับ $\binom{\mathbf{n}}{2}$ พจน์, $\mathbf{n}\geq 2$ และสัมพันธ์กับจำนวนในสามเหลี่ยมปาสคาล

4.4 จากตอนที่ 3 จำนวนพจน์ที่ไม่คล้ายกัน จากการกระจายกำลังสองสมบูรณ์ n พจน์ โดยการใช้ตารางสูตรการคูณ $(\mathbf{x}_1+\mathbf{x}_2+\ldots+\mathbf{x}_\mathbf{n})^2$ สามารถเขียนจัดรูปพจน์แสดงในรูปเมทริกซ์สมมาตรได้

4.5 จากตอนที่ 3 รูปแบบการกระจายกำลังสองสมบูรณ์ n พจน์ ของ $(\mathbf{x}_1+\mathbf{x}_2+\ldots+\mathbf{x}_\mathbf{n})^2$ สามารถเขียนแสดงในรูปเมทริกซ์สามเหลี่ยมบน หรือ เมทริกซ์สามเหลี่ยมล่างได้

$$\begin{pmatrix} x_1^2 & x_1x_2 & x_1x_3 & \ldots & x_1x_{n-1} & x_1x_n \\ x_1x_2 & x_2^2 & x_2x_3 & \ldots & x_2x_{n-1} & x_2x_n \\ x_1x_3 & x_2x_3 & x_3^2 & \ldots & x_3x_{n-1} & x_3x_n \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ x_1x_{n-1} & x_2x_{n-1} & x_3x_{n-1} & \ldots & x_{n-1}^2 & x_{n-1}x_n \\ x_1x_n & x_2x_n & x_3x_n & \ldots & x_{n-1}x_n & x_n^2 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} x_1^2 & 0 & 0 & \ldots & 0 & 0 \\ 2x_1x_2 & x_2^2 & 0 & \ldots & 0 & 0 \\ 2x_1x_3 & 2x_2x_3 & x_3^2 & \ldots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 2x_1x_{n-1} & 2x_2x_{n-1} & 2x_3x_{n-1} & \ldots & x_{n-1}^2 & 0 \\ 2x_1x_n & 2x_2x_n & 2x_3x_n & \ldots & 2x_{n-1}x_n & x_n^2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1^2 & 2x_1x_2 & 2x_1x_3 & \ldots & 2x_1x_{n-1} & 2x_1x_n \\ 0 & x_2^2 & 2x_2x_3 & \ldots & 2x_2x_{n-1} & 2x_2x_n \\ 0 & 0 & x_3^2 & \ldots & 2x_3x_{n-1} & 2x_3x_n \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \ldots & x_{n-1}^2 & 2x_{n-1}x_n \\ 0 & 0 & 0 & \ldots & 0 & x_n^2 \end{pmatrix}$$

บทที่ 5

สรุปผลการศึกษาและข้อเสนอแนะ

จากการดำเนินการศึกษาโครงงาน คณิตศาสตร์เชิงทฤษฎีหรือคำอธิบาย เรื่อง แผนภาพการกระจายกำลังสองสมบูรณ์ n พจน์ ด้วยตารางสูตรการคูณ (The n^{th} Perfect Square Expansions Diagram by Using Multiplicative Formula Table Method) ในครั้งนี้ คณะผู้ศึกษาได้ข้อสรุปของผลการศึกษาดังนี้

ผลการศึกษาจากการดำเนินโครงงาน

1. สูตรทั่วไปจากการกระจาย $(\mathbf{x}_1+\mathbf{x}_2+\ldots+\mathbf{x}_\mathbf{n})^2=\sum_{\mathbf{i}=1}^{\mathbf{n}}\mathbf{x}_\mathbf{i}^2+2\sum_{1\le\mathbf{i}<\mathbf{j}}^{\mathbf{n}}\mathbf{x}_\mathbf{i}\mathbf{x}_\mathbf{j}$
2. รูปแบบการกระจายกำลังสองสมบูรณ์ n พจน์ ด้วยตารางสูตรการคูณ ได้ผลลัพธ์ดังนี้

$\times$	$\mathbf{x}_1$	$\mathbf{x}_2$	$\cdots$	$\mathbf{x}_{\mathbf{n}-1}$	$\mathbf{x}_\mathbf{n}$
$\mathbf{x}_1$	$\mathbf{x}_1^2$	$\mathbf{x}_1\mathbf{x}_2$	$\cdots$	$\mathbf{x}_1\mathbf{x}_{\mathbf{n}-1}$	$\mathbf{x}_1\mathbf{x}_\mathbf{n}$
$\mathbf{x}_2$	$\mathbf{x}_1\mathbf{x}_2$	$\mathbf{x}_2^2$	$\cdots$	$\mathbf{x}_2\mathbf{x}_{\mathbf{n}-1}$	$\mathbf{x}_2\mathbf{x}_\mathbf{n}$
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\ddots$	$\vdots$	$\vdots$
$\mathbf{x}_{\mathbf{n}-1}$	$\mathbf{x}_1\mathbf{x}_{\mathbf{n}-1}$	$\mathbf{x}_2\mathbf{x}_{\mathbf{n}-1}$	$\cdots$	$\mathbf{x}_{\mathbf{n}-1}^2$	$\mathbf{x}_{\mathbf{n}-1}\mathbf{x}_\mathbf{n}$
$\mathbf{x}_\mathbf{n}$	$\mathbf{x}_1\mathbf{x}_\mathbf{n}$	$\mathbf{x}_2\mathbf{x}_\mathbf{n}$	$\cdots$	$\mathbf{x}_{\mathbf{n}-1}\mathbf{x}_\mathbf{n}$	$\mathbf{x}_\mathbf{n}^2$

3. รูปแบบการกระจายกำลังสองสมบูรณ์ n พจน์ ของ $(\mathbf{x}_1+\mathbf{x}_2+\ldots+\mathbf{x}_\mathbf{n})^2$ สามารถเขียนแทนด้วยผลบวกของทุกพจน์ ด้วยแผนภาพการกระจายได้ดังนี้

$$
\begin{array}{llllll}
\mathbf{x}_1^2 & 2\mathbf{x}_1\mathbf{x}_2 & 2\mathbf{x}_1\mathbf{x}_3 & 2\mathbf{x}_1\mathbf{x}_4 & \cdots & 2\mathbf{x}_1\mathbf{x}_\mathbf{n} \\
\mathbf{x}_2^2 & & 2\mathbf{x}_2\mathbf{x}_3 & 2\mathbf{x}_2\mathbf{x}_4 & \cdots & 2\mathbf{x}_2\mathbf{x}_\mathbf{n} \\
\mathbf{x}_3^2 & & & 2\mathbf{x}_3\mathbf{x}_4 & \cdots & 2\mathbf{x}_3\mathbf{x}_\mathbf{n} \\
\vdots & & & \ddots & & \vdots \\
\mathbf{x}_{\mathbf{n}-1}^2 & & & & \cdots & 2\mathbf{x}_{\mathbf{n}-1}\mathbf{x}_\mathbf{n} \\
\mathbf{x}_\mathbf{n}^2 & & & & &
\end{array}
$$

4. รูปแบบการกระจายกำลังสองสมบูรณ์ n พจน์ ของ $(\mathbf{x}_1+\mathbf{x}_2+\ldots+\mathbf{x}_\mathbf{n})^2$ สามารถเขียนจัดรูปพจน์แสดงในรูปเมทริกซ์สมมาตรขนาด $\mathbf{n}\times\mathbf{n}$ ได้ดังนี้

$$
\begin{pmatrix}
\mathbf{x}_1^2 & \mathbf{x}_1\mathbf{x}_2 & \mathbf{x}_1\mathbf{x}_3 & \ldots & \mathbf{x}_1\mathbf{x}_{\mathbf{n}-1} & \mathbf{x}_1\mathbf{x}_\mathbf{n} \\
\mathbf{x}_1\mathbf{x}_2 & \mathbf{x}_2^2 & \mathbf{x}_2\mathbf{x}_3 & \ldots & \mathbf{x}_2\mathbf{x}_{\mathbf{n}-1} & \mathbf{x}_2\mathbf{x}_\mathbf{n} \\
\mathbf{x}_1\mathbf{x}_3 & \mathbf{x}_2\mathbf{x}_3 & \mathbf{x}_3^2 & \ldots & \mathbf{x}_3\mathbf{x}_{\mathbf{n}-1} & \mathbf{x}_3\mathbf{x}_\mathbf{n} \\
\vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\
\mathbf{x}_1\mathbf{x}_{\mathbf{n}-1} & \mathbf{x}_2\mathbf{x}_{\mathbf{n}-1} & \mathbf{x}_3\mathbf{x}_{\mathbf{n}-1} & \ldots & \mathbf{x}_{\mathbf{n}-1}^2 & \mathbf{x}_{\mathbf{n}-1}\mathbf{x}_\mathbf{n} \\
\mathbf{x}_1\mathbf{x}_\mathbf{n} & \mathbf{x}_2\mathbf{x}_\mathbf{n} & \mathbf{x}_3\mathbf{x}_\mathbf{n} & \ldots & \mathbf{x}_{\mathbf{n}-1}\mathbf{x}_\mathbf{n} & \mathbf{x}_\mathbf{n}^2
\end{pmatrix}
$$

5. จากข้อ 4. รูปแบบการกระจายกำลังสองสมบูรณ์ n พจน์ ของ $(\mathbf{x}_1+\mathbf{x}_2+\cdots+\mathbf{x}_\mathbf{n})^2$ สามารถเขียนแสดงในรูปเมทริกซ์สามเหลี่ยมบนขนาด $\mathbf{n}\times\mathbf{n}$ หรือ เมทริกซ์สามเหลี่ยมล่าง $\mathbf{n}\times\mathbf{n}$ ได้ดังนี้

$$\begin{pmatrix} \mathbf{x}_1^2 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 2\mathbf{x}_1\mathbf{x}_2 & \mathbf{x}_2^2 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 2\mathbf{x}_1\mathbf{x}_3 & 2\mathbf{x}_2\mathbf{x}_3 & \mathbf{x}_3^2 & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 2\mathbf{x}_1\mathbf{x}_{\mathbf{n}-1} & 2\mathbf{x}_2\mathbf{x}_{\mathbf{n}-1} & 2\mathbf{x}_3\mathbf{x}_{\mathbf{n}-1} & \cdots & \mathbf{x}_{\mathbf{n}-1}^2 & 0 \\ 2\mathbf{x}_1\mathbf{x}_\mathbf{n} & 2\mathbf{x}_2\mathbf{x}_\mathbf{n} & 2\mathbf{x}_3\mathbf{x}_\mathbf{n} & \cdots & 2\mathbf{x}_{\mathbf{n}-1}\mathbf{x}_\mathbf{n} & \mathbf{x}_\mathbf{n}^2 \end{pmatrix}$$

หรือ

$$\begin{pmatrix} \mathbf{x}_1^2 & 2\mathbf{x}_1\mathbf{x}_2 & 2\mathbf{x}_1\mathbf{x}_3 & \cdots & 2\mathbf{x}_1\mathbf{x}_{\mathbf{n}-1} & 2\mathbf{x}_1\mathbf{x}_\mathbf{n} \\ 0 & \mathbf{x}_2^2 & 2\mathbf{x}_2\mathbf{x}_3 & \cdots & 2\mathbf{x}_2\mathbf{x}_{\mathbf{n}-1} & 2\mathbf{x}_2\mathbf{x}_\mathbf{n} \\ 0 & 0 & \mathbf{x}_3^2 & \cdots & 2\mathbf{x}_3\mathbf{x}_{\mathbf{n}-1} & 2\mathbf{x}_3\mathbf{x}_\mathbf{n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & \mathbf{x}_{\mathbf{n}-1}^2 & 2\mathbf{x}_{\mathbf{n}-1}\mathbf{x}_\mathbf{n} \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & \mathbf{x}_\mathbf{n}^2 \end{pmatrix}$$

6. จำนวนพจน์ที่แตกต่างกันทั้งหมดจากการกระจาย $(\mathbf{x}_1+\mathbf{x}_2+\cdots+\mathbf{x}_\mathbf{n})^2$ เท่ากับ $\begin{pmatrix}\mathbf{n}+1\\2\end{pmatrix}$ พจน์

7. จำนวนพจน์ที่แตกต่างกันทั้งหมดของ $\mathbf{x}_\mathbf{i}^2$ มีจำนวน $\mathbf{n}$ พจน์ โดยที่ $\mathbf{i}=1,2,\ldots,\mathbf{n}$

จำนวนพจน์ของ $2\mathbf{x}_\mathbf{i}\mathbf{x}_\mathbf{j}$ โดยที่ $\mathbf{i}<\mathbf{j}$ และ $\mathbf{i},\mathbf{j}=1,2,\ldots,\mathbf{n}$ เท่ากับ $\begin{pmatrix}\mathbf{n}\\2\end{pmatrix}$ พจน์, $\mathbf{n}\geq 2$ และสัมพันธ์กับจำนวนในสามเหลี่ยมปาสคาล

ดังนี้

$$
\begin{array}{ccccccccccc}
 & & & & & \binom{0}{0} & & & & & \\
 & & & & \binom{1}{0} & & \binom{1}{1} & & & & \\
 & & & \binom{2}{0} & & \binom{2}{1} & & \boxed{\binom{2}{2}} & & & \\
 & & \binom{3}{0} & & \binom{3}{1} & & \boxed{\binom{3}{2}} & & \binom{3}{3} & & \\
 & \binom{4}{0} & & \binom{4}{1} & & \boxed{\binom{4}{2}} & & \binom{4}{3} & & \binom{4}{4} & \\
\binom{5}{0} & & \binom{5}{1} & & \boxed{\binom{5}{2}} & & \binom{5}{3} & & \binom{5}{4} & & \binom{5}{5}
\end{array}
$$

$$
\begin{array}{cccccccccccl}
 & & & & & (1) & & & & & & \\
 & & & & (1) & & (1) & & & & & \\
 & & & (1) & & (2) & & \boxed{(1)} & & & & \leftarrow 2 \text{ พจน์} \\
 & & (1) & & (3) & & \boxed{(3)} & & (1) & & & \leftarrow 3 \text{ พจน์} \\
 & (1) & & (4) & & \boxed{(6)} & & (4) & & (1) & & \leftarrow 4 \text{ พจน์} \\
(1) & & (5) & & \boxed{(10)} & & (10) & & (5) & & (1) & \leftarrow 5 \text{ พจน์}
\end{array}
$$

ข้อเสนอแนะจากการดำเนินการศึกษาโครงงาน

ข้อเสนอแนะเชิงทฤษฎี

การศึกษาในครั้งนี้ คณะผู้ศึกษาได้กำหนดข้อคาดเดาเชิงทฤษฎี (Theoretic Conjecture) เพื่อเป็นกรอบสำหรับการศึกษาครั้งต่อไป ไว้ดังนี้

ข้อคาดเดา 1 ผลรวมของสัมประสิทธิ์จากการกระจายกำลังสองสัมบูรณ์ของจำนวนจริง x_i

จำนวน $\mathbf{n}$ พจน์ ในรูป $(\mathbf{k}_1\mathbf{x}_1 + \mathbf{k}_2\mathbf{x}_2 + \cdots + \mathbf{k}_2\mathbf{x}_\mathbf{n})^2$

เท่ากับ $(\mathbf{k}_1 + \mathbf{k}_2 + \cdots + \mathbf{k}_2)^2$, โดยที่ $\mathbf{k}_\mathbf{i}$ เป็นค่าคงที่ และ $\mathbf{i} = 1, 2, \ldots, \mathbf{n}$

ข้อคาดเดา 2 (อาหนึ่ง ชูไวย, 2555) ผลการกระจายกำลังสองสมบูรณ์ $\mathbf{n}$ พจน์

$$
(\mathbf{x}_1 + \mathbf{x}_2 + \cdots + \mathbf{x}_\mathbf{n})^2 = \sum \mathbf{a}_\mathbf{ij} \in [\mathbf{x}_1 \quad \mathbf{x}_2 \quad \cdots \quad \mathbf{x}_\mathbf{n}]_{1\times\mathbf{n}} \cdot \begin{bmatrix} \mathbf{x}_1 & \mathbf{x}_2 & \cdots & \mathbf{x}_\mathbf{n} \\ \mathbf{x}_2 & \mathbf{x}_3 & \cdots & \mathbf{x}_1 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \mathbf{x}_\mathbf{n} & \mathbf{x}_1 & \cdots & \mathbf{x}_{\mathbf{n}-1} \end{bmatrix}_{\mathbf{n}\times\mathbf{n}}
$$

ข้อเสนอแนะจากการดำเนินการศึกษาในครั้งนี้และครั้งต่อไป

1. ควรใช้โปรแกรมทางคณิตศาสตร์/วิศวกรรมศาสตร์/สถิติ ช่วยสร้างแบบจำลองประกอบการทดลองเพื่อให้เห็นรูปแบบการทดลองที่ชัดเจนมากขึ้น
2. ควรศึกษาศึกษากำลัง $\mathbf{n}$ สมบูรณ์ที่นอกเหนือจากกำลังสอง

บรรณานุกรม

“Multinomial Expansions”
http://www.oocities.org/mathattam/AdvancedAlgebra.html
(วันที่สืบค้น: 25 สิงหาคม 2555)

“Multinomial Expansions”
http://www.trans4mind.com/personal_development/mathematics/series/multiNomialExpansion.htm (วันที่สืบค้น: 25 สิงหาคม 2555)

กรมวิชาการ สถาบันส่งเสริมการสอนวิทยาศาสตร์และ เทคโนโลยี กระทรวงศึกษาธิการ. **คู่มือการจัดการเรียนรู้กลุ่มสาระการเรียนรู้คณิตศาสตร์**

สถาบันส่งเสริมการสอนวิทยาศาสตร์และเทคโนโลยี กระทรวงศึกษาธิการ.**หนังสือเรียนสาระการเรียนรู้พื้นฐาน คณิตศาสตร์ เล่ม 1 ชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 4**. พิมพ์ครั้งที่ 5 . คุรุสภาลาดพร้าว : กรุงเทพฯ , 2547.

สถาบันส่งเสริมการสอนวิทยาศาสตร์และเทคโนโลยี กระทรวงศึกษาธิการ.**หนังสือเรียนสาระการเรียนรู้เพิ่มเติม คณิตศาสตร์ เล่ม 1 ชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 4**. พิมพ์ครั้งที่ 5. คุรุสภาลาดพร้าว : กรุงเทพฯ , 2547.

สถาบันส่งเสริมการสอนวิทยาศาสตร์และเทคโนโลยี กระทรวงศึกษาธิการ.**หนังสือเรียนสาระการเรียนรู้เพิ่มเติม คณิตศาสตร์ เล่ม 2 ชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 4**

สถาบันส่งเสริมการสอนวิทยาศาสตร์และเทคโนโลยี กระทรวงศึกษาธิการ.**หนังสือเรียนสาระการเรียนรู้พื้นฐาน คณิตศาสตร์ เล่ม 1 ชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 5** .พิมพ์ครั้งที่ 3. คุรุสภาลาดพร้าว : กรุงเทพฯ, 2548.