ลิมิตและความต่อเนื่องของฟังก์ชัน

Limit and Continuity of a Function

โดย **ครูอาหนึ่ง ชูไวย**

ครูโครงการ สควค. รุ่น 11

กลุ่มสาระการเรียนรู้คณิตศาสตร์

โรงเรียนเทิงวิทยาคม

อำเภอเทิง จังหวัดเชียงราย

คำนำ

การเรียนคณิตศาสตร์ให้ประสบความสำเร็จได้ดี ผู้ศึกษาจะต้องมีความรู้ความเข้าใจในคณิต-ศาสตร์พื้นฐาน มีทักษะการคิดและกระบวนการทางคณิตศาสตร์ อันได้แก่ ความรู้ ความสา-มารถในการแก้ปัญหาด้วยวิธีการที่หลากหลายตลอดจนมีความเข้าใจและะรู้จักการใช้เหตุผล มีความคิดริเริ่มสร้างสรรค์ สามารถทำงานอย่างเป็นระบบ มีระเบียบวินัย มีความ รอบคอบ และนำความรู้นั้นไปประยุกต์เชื่อมโยงกับศาสตร์อื่นๆได้เป็นอย่างดี **สิ่งที่ สำคัญก็คือ มีเจต-คติที่ดีต่อวิชาคณิตศาสตร์**

ผู้เรียบเรียงขอมอบคุณความดีในการจัดทำเอกสารเล่มนี้แด่ครูอาจารย์ทุกท่านที่ประ-สิทธิ์ประสาทวิชา และน้อมเป็นเครื่องบูชาพระคุณแด่บิดามารดา, คุณยายต่อม ค้าแป้ง ที่เป็นกำลังใจให้ผู้เรียบเรียงตลอดมา

อนึ่ง หากมีข้อผิดพลาดหรือข้อเสนอแนะประการใดสำหรับเอกสารเล่มนี้ผู้เรียบเรียง ยินดีรับฟังและจะแก้ไขต่อไป ขอขอบพระคุณมา ณ โอกาสนี้

อาหนึ่ง ชูไวย
กลุ่มสาระการเรียนรู้คณิตศาสตร์
โรงเรียนเทิงวิทยาคม
อำเภอเทิง จังหวัดเชียงราย

เรียนแคลคูลัสอย่างไรให้สำเร็จ เรื่องง่ายๆ ที่ใครๆก็คิดว่ารู้

1. จัดเวลาการทำแบบฝึกหัดและการทบทวนให้เหมาะสม วิธีนี้จะช่วยสร้างความมั่นใจในการเรียนและเป็นการสร้างสมดุลระหว่างเวลา
เรียนและเวลาพักผ่อน

2. ใช้เวลาอย่างน้อย 2-4 ชั่วโมงในการทำแบบฝึกหัดของแต่ละหัวข้อ จะช่วยให้นักศึกษาจัดระบบความคิด สร้างคำถาม และสร้างแนวคิดสำหรับการแก้ปัญหาที่ซับซ้อนท้าทาย มากขึ้นได้

3. นิยาม สูตร และทฤษฎีบท ที่กล่าวถึงในห้องเรียนหรือต้องใช้ในการทำแบบฝึกหัดควรจะทำความเข้าใจในทันที การผลัดวันไปเรื่อยๆจนกว่าจะสอบ จะทำลายโอกาสการเข้าใจ เนื้อหาที่ลึกซึ้งขึ้น

4. พยายามให้เวลาในการทำแบบฝึกหัดแคลคูลัสทุกวัน วันละเล็กน้อย จะได้คุ้นเคยกับแนวคิดนิยาม และทฤษฎีบท ทางคณิตศาสตร์ ซึ่งจะช่วยให้การเรียนง่ายเพิ่มขึ้นทุกวัน

5. หาเพื่อนอย่างน้อย 1-2 คนในห้อง ที่จะทำการบ้านและเตรียมตัวสอบด้วยกัน เวลาที่ดีที่สุด ที่ควรจะจับกลุ่มปรึกษากันคือหลังจากได้ใช้ความรู้ความสามารถและประสบการณ์ของตนเองอย่างที่สุดแล้วในการแก้ปัญหา เมื่อพบโจทย์ที่แก้ไม่ได้อย่าท้อแท้โดยทันที นี้เป็นโอกาสที่จะทำให้จินตนาการและความรู้ทางคณิตศาสตร์งอกงามขึ้นการหาความช่วยเหลือหรือดูเฉลย วิธีทำโจทย์ก่อนที่จะลองพยายามด้วยตนเองจะทำให้เราไม่ทราบศักยภาพ ที่แท้จริงของตัวเรา

6. เตรียมตัวอย่างน้อย 5 วันก่อนสอบ ให้เขียนแจกแจงเรื่องต่างๆที่ต้องสอบจะได้รู้ว่าต้องเตรียม อะไรบ้างและมีเวลาให้กับสิ่งที่ไม่ค่อยเข้าใจได้อย่าง พอเพียงการทำเช่นนี้จะช่วยลดความเครียด และวิตกกังวลของการสอบ ทั้งยังลดความวุ่นวายเมื่อมีปัญหาเร่งด่วนที่อาจเข้ามาแทรกได้ เช่นเจ็บป่วย ญาติหรือเพื่อนมาเยี่ยม ทะเลาะกับแฟน หรือต้องส่งรายงานของวิชาอื่นที่เรียนการอ่านหนังสืออย่างหนักตลอดวันก่อนการสอบคงไม่ช่วยให้ทำข้อสอบได้ดีขึ้นมาก อย่าลืมว่าการท่องจำเป็นเทคนิคการเรียนคณิตศาสตร์ที่ได้ผล น้อยที่สุด

7. เตรียมตัวสอบโดยลงมือทำปัญหาใหม่ๆ แหล่งที่จะหาได้คือ หนังสือแคลคูลัสทั้งหลายในห้องสมุด หรือข้อสอบเก่าการทำโจทย์เฉพาะเท่าที่มีอยู่ท้ายหัวข้อของเอกสารประกอบการสอนอาจไม่ใช่การเตรียมตัวที่มีประสิทธิภาพ เนื่องจากเราทราบว่าแต่ละหัวข้อเน้นอะไรอาจทำให้เราเข้าใจผิดคิดว่าเข้าใจเนื้อหาดีแล้วให้ลองทำโจทย์ที่มี

หลายหัวข้อรวมกัน เราจะได้ฝึกการจำแนกปัญหาและนำความรู้ที่มีอยู่มาประมวลผลแก้ปัญหาได้

8. ฝึกหัดทำแบบจำลองของข้อสอบ ภายในเวลาและเงื่อนไขอื่นๆของการสอบเช่น ห้ามใช้หนังสือ เครื่องคิดเลข ห้ามถามเพื่อน

9. ควรคิดว่า "ข้อสอบน่าจะยากและต้องเป็นโจทย์ที่น่าสนใจและท้าทายความสามารถ" เพื่อจะได้มีการเตรียมตัวที่เหมาะสมถ้าข้อสอบเกิดง่ายกว่าที่คิดเราก็ย่อมที่จะได้คะแนนสูงเพราะมีการเตรียมตัวมาดี

10. การเขียนเฉพาะคำตอบไม่ได้มีค่าอะไรมากนัก เนื่องจากคะแนนของการทำปัญหาคณิตศาสตร์ ไม่ได้อยู่ที่คำตอบ แต่อยู่ที่การแสดงว่าเข้าใจวิธีที่จะได้ คำตอบหรือไม่

11. ในระหว่างการสอบ ถ้าไม่รู้ว่าจะเริ่มต้นทำอย่างไร อย่าคิดที่จะทุจริตโดยเด็ดขาด การทุจริตเป็นความผิดทางวินัยและศีลธรรมเสื่อมเสียถึงวงศ์ตระกูล อาจส่งผลร้ายแรงถึงขั้นพ้นสภาพการเป็นนักศึกษาไม่ว่าจะคิดในแง่ใด การ ทุจริตไม่คุ้มที่จะทำ การเขียนเรื่อยเปื่อยหรือทำแบบมั่วๆเพื่อคิดจะหลวก ลวงอาจารย์ที่ตรวจหรือคิดว่าเผื่ออาจารย์จะให้คะแนน เพราะเขียนยาว ก็ไม่ได้ผลเช่นกันสิ่งที่ควรจะทำคือ อ่านโจทย์อีกรอบ ตีความเป็นคำพูดของเราว่าโจทย์ต้องการอะไร อาจวาดรูปประกอบ เราอาจจะเข้าใจมากขึ้น ถ้ายังทำไม่ได้ให้ไปทำข้ออื่นก่อนแล้วค่อยกลับมาคิดใหม่ การตอบปัญหาที่ตรงประเด็นและถูกต้องแม้จะเพียงเล็กน้อยก็อาจได้คะแนนมากกว่า การตอบยาวแต่หาประเด็นไม่ได้

12. เมื่อถึงวันสอบ

    - เข้าห้องสอบที่ถูกต้อง และตรงเวลา
    - อ่านคำชี้แจง หน้าแรก และกรอกข้อมูลทุกอย่างให้ครบถ้วนถูกต้อง
    - อย่าตื่นตระหนกและลบทุกอย่างตอนใกล้หมดเวลา ส่วนที่ทำนั้นอาจถูกต้องแล้วก็ได้
    - ถ้ามีเวลาเหลืออย่ารีบออกจากห้องสอบ ให้ตรวจทานก่อน

13. เมื่อมีการประกาศคะแนนแล้วให้ขอดูข้อสอบว่าทำอะไรถูกผิดอย่างไร จะได้ปรับปรุงตนเอง ถ้ามีข้อสงสัยเรื่องคะแนนให้รีบสอบถาม การตรวจข้อสอบจำนวนมากในแต่ละครั้ง อาจารย์อาจเกิดความผิดพลาดได้

14. อย่าคร่ำครวญขอร้องอาจารย์ด้วยเหตุผลต่างๆ เพื่อขอเกรด เช่น จะต้องถูกให้ออกเพราะเกรดไม่ถึง เรียนตัวต่อไปไม่ได้และต้องเรียนช้ากว่าเพื่อนในรุ่นหลุดทุน พ่อแม่จะไม่ส่งต่อ ไม่มีเงินเรียนตัวนี้แล้ว อยู่ปีแปดเหลือตัวนี้ อีกตัวเดียวเท่านั้นได้งานแล้ว เกณฑ์สูงไปทำไมปีก่อนนั้นได้ เครียดมาก เรื่องเกรดจนป่วย... สำหรับอาจารย์บางท่านบางครั้งอาจจะได้ผล แต่ไม่รู้สึกละอายแก่ใจบ้างเลย หรือมันเป็นคะแนนที่ได้มาโดยมิสมควร ไม่ใช่จากความสามารถของตนเอาเปรียบเพื่อนคนอื่น

15. ใช้แหล่งความรู้ที่มีอย่างคุ้มค่าที่สุด แหล่งความรู้ได้แก่ การบรรยายในชั้นเรียน อาจารย์ผู้สอนหนังสือในห้องสมุด การจัดติวโดยชมรมวิชาการรุ่นพี่ เพื่อนๆ

16. หลีกเลี่ยงความผิดพลาดเล็กๆน้อยๆ ความผิดพลาดแต่ละอย่างที่เกิดขึ้นอาจเกิดจากความไม่รอบคอบ หรืออาจเป็นตัวบ่งชี้ปัญหาที่ร้ายแรงกว่านั่นคือการเข้าใจผิดหรือไม่เข้าใจกฎเกณฑ์ทางคณิตศาสตร์นักศึกษาสามารถหลีกเลี่ยง ปัญหาเหล่านี่ได้โดยต้องเข้าใจก่อนว่าทำไมถึงไม่ถูกต้อง และระมัดระวังในทุกขั้นตอนการทำงาน

สารบัญ

สารบัญรูป

บทที่ 1

ลิมิตและความต่อเนื่องของฟังก์ชัน

1.1 แนวคิดลิมิตของฟังก์ชัน

กำหนดให้ $f(x) = 4x + 3$ พิจารณาค่าของ x และ $f(x)$ ดังตารางต่อไปนี้

x	$f(x)$
1	7.0000
1.5	9.0000
1.9	10.6000
1.99	10.9600
1.999	10.9960

ตารางที่ 1.1

x	$f(x)$
3	15.0000
2.5	13.0000
2.1	11.4000
2.01	11.0400
2.001	11.0040

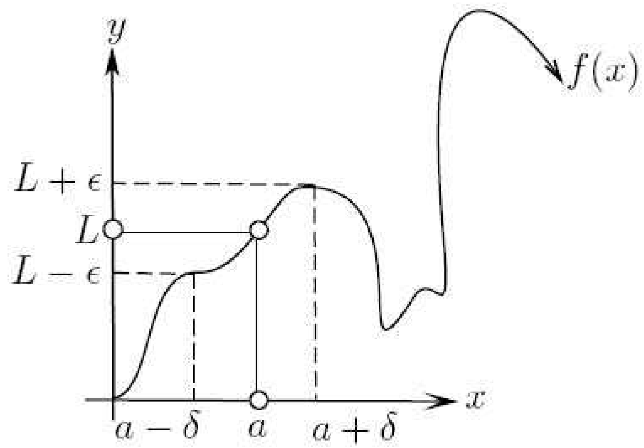
ตารางที่ 1.2

จากตารางที่ 1.1 จะสังเกตได้ว่า $f(x)$ มีค่าเข้าใกล้ 11 ในขณะที่ x มีค่าเข้าใกล้ 2 ทางซ้าย ($x < 2$) เรากล่าวว่า “ลิมิตของ $f(x)$ ในขณะที่ x เข้าใกล้ 2 ทางซ้ายมีค่าเท่ากับ 11” และเขียนแทนด้วย $\lim\limits_{x\to 2^-} f(x) = 11$

และจากตารางที่ 1.2 จะสังเกตได้ว่า $f(x)$ มีค่าเข้าใกล้ 11 ในขณะที่ x มีค่าเข้าใกล้ 2 ทางขวา ($x > 2$) เรากล่าวว่า “ลิมิตของ $f(x)$ ในขณะที่ x เข้าใกล้ 2 ทางขวามีค่าเท่ากับ 11” และเขียนแทนด้วย $\lim\limits_{x\to 2^+} f(x) = 11$

ในกรณีเช่นนี้ $\lim\limits_{x\to 2^-} f(x) = \lim\limits_{x\to 2^+} f(x) = 11$ เรากล่าวว่า “ลิมิตของ $f(x)$ ในขณะที่ x เข้าใกล้ 2 มีค่าเท่ากับ 11” และเขียนแทนด้วย $\lim\limits_{x\to 2} f(x) = 11$

บทนิยาม 1.1.1. ให้ f เป็นฟังก์ชันค่าจริง ซึ่งมีค่าบนช่วงเปิด I, ยกเว้นที่ $a \in I$, $f(a)$ อาจมีค่าหรือไม่ก็ได้ เราเรียกจำนวนจริง L ว่า "ลิมิตของ f ที่ a"ถ้าสำหรับจำนวนจริง $\epsilon > 0$ ใดๆ มีจำนวนจริง $\delta > 0$ ซึ่งสำหรับทุก $x \in I$ ถ้า $0 < |x - a| < \delta$ แล้วทำให้ $|f(x) - L| < \epsilon$ แทน L ด้วยสัญลักษณ์ $\lim\limits_{x \to a} f(x)$



รูปที่ 1.1: ลิมิตของฟังก์ชัน; $\lim\limits_{x \to a} f(x) = L$

บทนิยาม 1.1.2. ให้ L เป็นจำนวนจริง และ $y = f(x)$ จะกล่าวว่า

1. ลิมิตของ $f(x)$ ในขณะที่ x เข้าใกล้ a ทางซ้ายมีค่าเท่ากับ L ก็ต่อเมื่อ $f(x)$ มีค่าเข้าใกล้ L เมื่อ x มีค่าเข้าใกล้ a ทางซ้าย ($x < a$) และเขียนแทนด้วย $\lim\limits_{x \to a^-} f(x) = L$

2. ลิมิตของ $f(x)$ ในขณะที่ x เข้าใกล้ a ทางขวามีค่าเท่ากับ L ก็ต่อเมื่อ $f(x)$ มีค่าเข้าใกล้ L เมื่อ x มีค่าเข้าใกล้ a ทางขวา ($x > a$) และเขียนแทนด้วย $\lim\limits_{x \to a^+} f(x) = L$

3. ลิมิตของ $f(x)$ ในขณะที่ x เข้าใกล้ a มีค่าเท่ากับ L ก็ต่อเมื่อ $\lim\limits_{x \to a^-} f(x) = \lim\limits_{x \to a^+} f(x) = L$ และในกรณีเช่นนี้เรากล่าวว่า $\lim\limits_{x \to a} f(x)$ มีค่า และ $\lim\limits_{x \to a} f(x) = L$

ถ้า $\lim_{x\to a^-} f(x) \neq \lim_{x\to a^+} f(x)$ แล้วเรากล่าวว่า $\lim_{x\to a} f(x)$ ไม่มีค่า

$$\boxed{\lim_{x\to a} f(x) = L \text{ ก็ต่อเมื่อ } \lim_{x\to a^-} f(x) = L \text{ และ } \lim_{x\to a^+} f(x) = L}$$

ตัวอย่าง 1.1.3. กำหนดให้ $f(x) = x^2 - x + 1$ จงหา $\lim_{x\to 2^-} f(x)$, $\lim_{x\to 2^+} f(x)$ และ $\lim_{x\to 2} f(x)$

<u>วิธีทำ</u>

x	$f(x)$
1	1.0000
1.5	1.7500
1.9	2.7100
1.99	2.9701
1.999	2.9970

x	$f(x)$
3	7.0000
2.5	4.7500
2.1	3.3100
2.01	3.0301
2.001	3.0030

จากตารางจะได้ว่า $\lim_{x\to 2^-} f(x) = 3$ และ $\lim_{x\to 2^+} f(x) = 3$ ดังนั้น $\lim_{x\to 2} f(x) = 3$ □

ตัวอย่าง 1.1.4. ให้ $h(x) = \dfrac{2x^2 - x - 6}{x - 2}$ จงหา $\lim_{x\to 2^+} h(x)$, $\lim_{x\to 2^-} h(x)$ และ $\lim_{x\to 2} h(x)$

<u>วิธีทำ</u> จากนิยามฟังก์ชัน h จะได้ว่า ที่จุด $x = 2$ ไม่นิยาม แต่สำหรับ $x \neq 2$ จะได้ว่า

$$h(x) = \frac{2x^2 - x - 6}{x - 2} = \frac{(2x+3)(x-2)}{x-2} = 2x + 3$$

พิจารณาค่าของ $h(x)$ ในขณะที่ x มีค่าเข้าใกล้ 2 ดังตารางต่อไปนี้

x	$h(x)$
1	5.0000
1.5	6.0000
1.9	6.8000
1.99	6.9800
1.999	6.9980

x	$h(x)$
3	9.0000
2.5	8.0000
2.1	7.2000
2.01	7.0200
2.001	7.0020

นั่นคือ $\lim_{x\to 2^-} h(x) = 7$ และ $\lim_{x\to 2^+} h(x) = 7$ ดังนั้น $\lim_{x\to 2} h(x) = 7$ □

ตัวอย่าง 1.1.5. จงหา $\lim\limits_{x\to 1^-} f(x)$, $\lim\limits_{x\to 1^+} f(x)$ และ $\lim\limits_{x\to 1} f(x)$ เมื่อกำหนดให้

$$f(x) = \begin{cases} 3x+1 & \text{เมื่อ } x \le 1 \\ x^2+4 & \text{เมื่อ } x > 1 \end{cases}$$

__**วิธีทำ**__ พิจารณาค่าของ f ดังตารางต่อไปนี้

x	$h(x)$
0	1.0000
0.5	2.5000
0.9	3.70010
0.99	3.9700
0.999	3.9970

x	$h(x)$
2	0.0000
1.5	6.2500
1.1	5.2100
1.01	5.0201
1.001	5.0020

นั่นคือ $\lim\limits_{x\to 1^-} f(x) = 4$ และ $\lim\limits_{x\to 1^+} f(x) = 5$ ดังนั้น $\lim\limits_{x\to 1} f(x)$ ไม่มีค่า □

ตัวอย่าง 1.1.6. จงหาค่าของ $\lim\limits_{x\to 0} f(x)$ เมื่อ $f(x) = \dfrac{\sqrt{1-x}-1}{x}$

__**วิธีทำ**__ พิจารณาค่าของ $f(x)$ เมื่อ x มีค่าเข้าใกล้ 0 ดังตารางต่อไปนี้

x	$f(x)$ (ค่าประมาณ)
-0.1	-0.4881
-0.01	-0.4988
-0.001	-0.4999
-0.0001	-0.5000
-0.00001	-0.5000

x	$f(x)$ (ค่าประมาณ)
0.1	-0.5132
0.01	-0.5013
0.001	-0.5001
0.0001	-0.5000
0.00001	-0.5000

จากตารางจะได้ว่า $\lim\limits_{x\to 0} f(x) = -0.5$ □

แบบฝึกหัด 1.1

จงหาค่าของ $\lim\limits_{x\to c^+} f(x)$, $\lim\limits_{x\to c^-} f(x)$ และ $\lim\limits_{x\to c} f(x)$ จากตารางที่กำหนดให้ต่อไปนี้

1. $f(x) = 5x - 2$ และ $c = 2$

x	$f(x)$
3	13.0000
2.5	10.5000
2.1	8.5000
2.01	8.0500
2.001	8.0050

x	$f(x)$
1	3.0000
1.5	5.5000
1.9	7.5000
1.99	7.9500
1.999	7.9950

2. $f(x) = \dfrac{3x}{x+5}$ และ $c = 1$

x	$f(x)$
2	0.8571
1.5	0.6923
1.1	0.5410
1.01	0.5042
1.001	0.5004

x	$f(x)$
0	0.0000
0.5	0.2727
0.9	0.4576
0.99	0.4958
0.999	0.4996

3. $f(x) = \dfrac{2-\sqrt{x+4}}{x}$ และ $c = 0$

x	$f(x)$
-1	-0.2679
-0.5	-0.2583
-0.1	-0.2516
-0.01	-0.2502
-0.001	-0.2500

x	$f(x)$
1	-0.2361
0.5	-0.2426
0.1	-0.2485
0.01	-0.2498
0.001	-0.2500

4. $f(x) = \begin{cases} 4-3x, & \text{เมื่อ } x < -2 \\ x^2+3, & \text{เมื่อ } x \geq -2 \end{cases}$ และ $c = -2$

x	$f(x)$
-1	4.0000
-1.5	5.2500
-1.9	6.6100
-1.99	6.9601
-1.999	6.9960

x	$f(x)$
-3	13.0000
-2.5	11.5000
-2.1	10.3000
-2.01	10.0300
-2.001	10.0030

เฉลยแบบฝึกหัด 1.1

1. $\lim\limits_{x\to 2^+} f(x) = 8$, $\lim\limits_{x\to 2^-} f(x) = 8$ และ $\lim\limits_{x\to 2} f(x) = 8$
2. $\lim\limits_{x\to 1^+} f(x) = 0.5$, $\lim\limits_{x\to 1^-} f(x) = 0.5$ และ $\lim\limits_{x\to 1} f(x) = 0.5$
3. $\lim\limits_{x\to 0^+} f(x) = -0.25$, $\lim\limits_{x\to 0^-} f(x) = -0.25$ และ $\lim\limits_{x\to 0} f(x) = -0.25$
4. $\lim\limits_{x\to -2^+} f(x) = 7$, $\lim\limits_{x\to 2^-} f(x) = 10$ และ $\lim\limits_{x\to 0} f(x)$ ไม่มีค่า

1.2 ทฤษฎีบทที่สำคัญ

ทฤษฎีบท 1.2.1. ให้ a และ k เป็นจำนวนจริง ถ้า $\lim\limits_{x\to a} f(x) = L$ และ $\lim\limits_{x\to a} g(x) = M$ โดยที่ L และ M เป็นจำนวนจริง แล้ว

1. $\lim\limits_{x\to a} k = k$
2. $\lim\limits_{x\to a} x = a$
3. $\lim\limits_{x\to a}[kf(x)] = k\lim\limits_{x\to a} f(x) = kL$
4. $\lim\limits_{x\to a}[f(x)+g(x)] = \lim\limits_{x\to a} f(x) + \lim\limits_{x\to +a} g(x) = L + M$
5. $\lim\limits_{x\to a}[f(x)-g(x)] = \lim\limits_{x\to a} f(x) - \lim\limits_{x\to a} g(x) = L - M$
6. $\lim\limits_{x\to a}[f(x)g(x)] = \big[\lim\limits_{x\to a} f(x)\big]\big[\lim\limits_{x\to a} g(x)\big] = L\cdot M$

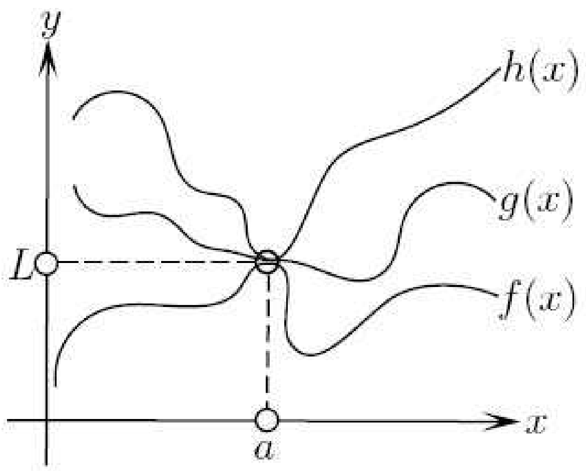
7. $\lim\limits_{x\to a}\left[\dfrac{f(x)}{g(x)}\right] = \dfrac{\lim\limits_{x\to a} f(x)}{\lim\limits_{x\to a} g(x)} = \dfrac{L}{M}$ เมื่อ $M \neq 0$

8. $\lim\limits_{x\to a} \sqrt[n]{f(x)} = \sqrt[n]{\lim\limits_{x\to a} f(x)} = \sqrt[n]{L}$

9. $\lim\limits_{x\to a}[f(x)]^n = [\lim\limits_{x\to a} f(x)]^n = L^n$

10. ถ้า $p(x) = c_n x^n + c_{n-1}x^{n-1} + \ldots + c_1 x + c_0$ เป็นพหุนาม แล้ว $\lim\limits_{x\to a} p(x) = p(a)$

11. ($Sandwich\ Theorem$ หรือ $Squeeze\ Theorem$) ให้ $f,\ g$ และ h เป็นฟังก์ชันค่าจริง ซึ่งมีค่าบนช่วงเปิด I, ยกเว้นที่ $a \in I,\ f(a),\ g(a),\ h(a)$ อาจมีค่าหรือไม่ก็ได้ ถ้า $f(x) \leq g(x) \leq h(x)$ สำหรับทุกๆ $x \in I$ ที่มี a เป็นสมาชิก โดยที่ $x \neq a$ ถ้า $\lim\limits_{x\to a} f(x) = L = \lim\limits_{x\to a} h(x)$ จะได้ว่า $\lim\limits_{x\to a} g(x) = L$



รูปที่ 1.2: $Sandwich\ Theorem$ หรือ $Squeeze\ Theorem$

สำหรับทฤษฎีบท 1.2.1 ยังคงเป็นจริงสำหรับ $x \to a^-$ และ $x \to a^+$

ตัวอย่าง 1.2.2. จงหาค่าของลิมิตต่อไปนี้

1. $\lim\limits_{x\to -2}(3x^2 - 5x + 4)$
2. $\lim\limits_{x\to 2}(4x^2 - 3)^3$
3. $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{(2x+4)^3}{(2-5x)^4}$
4. $\lim\limits_{x\to -1}\sqrt[3]{3x^2 + 6x - 5}$

วิธีทำ 1. $$\begin{aligned}\lim_{x\to -2}(3x^2-5x+4) &= (\lim_{x\to -2}3x^2)-(\lim_{x\to -2}5x)+(\lim_{x\to -2}4)\\ &= 3(\lim_{x\to -2}x^2)-5(\lim_{x\to -2}x)+4\\ &= 3(\lim_{x\to -2}x)^2-5(-2)+4\\ &= 3(-2)^2-5(-2)+4=26\end{aligned}$$

2. $$\begin{aligned}\lim_{x\to 2}(4x^2-3)^3 &= \big(\lim_{x\to 2}(4x^2-3)\big)^3\\ &= \big(4(2)^2-3\big)^3=2197\end{aligned}$$

3. $$\begin{aligned}\lim_{x\to 1}\frac{(2x+4)^3}{(2-5x)^4} &= \frac{\lim_{x\to 1}(2x+4)^3}{\lim_{x\to 1}(2-5x)^4}\\ &= \frac{(\lim_{x\to 1}(2x+4))^3}{(\lim_{x\to 1}(2-5x))^4}\\ &= \frac{(2(1)+4)^3}{(2-5(1))^4}=\frac{8}{3}\end{aligned}$$

4. $$\begin{aligned}\lim_{x\to -1}\sqrt[3]{3x^2+6x-5} &= \sqrt[3]{\lim_{x\to -1}(3x^2+6x-5)}\\ &= \sqrt[3]{(3(-1)^2+6(-1)-5)}=-2\end{aligned}$$

$\square$

ตัวอย่าง 1.2.3. กำหนดให้ $f(x)=7-|x-2|$ จงหาค่าของ $\lim_{x\to 2^-}f(x)$, $\lim_{x\to 2^+}f(x)$ และ $\lim_{x\to 2}f(x)$

วิธีทำ เนื่องจาก $$|x-2| = \begin{cases} -(x-2) & \text{เมื่อ } x<2\\ x-2 & \text{เมื่อ } x\geq 2\end{cases}$$

จะได้ว่า $$7-|x-2| = \begin{cases} x+5 & \text{เมื่อ } x<2\\ 9-x & \text{เมื่อ } x\geq 2\end{cases}$$

ดังนั้น $\lim\limits_{x\to 2^-} f(x) = \lim\limits_{x\to 2^-}(x+5) = 2+5 = 7$

และ $\lim\limits_{x\to 2^+} f(x) = \lim\limits_{x\to 2^+}(9-x) = 9-2 = 7$

นั่นคือ $\lim\limits_{x\to 2} f(x) = 7$ $\square$

ตัวอย่าง 1.2.4. จงหาค่าของ $\lim\limits_{x\to 3}\dfrac{|x|-3}{|x-3|}$

<u>**วิธีทำ**</u> จาก $|x| = \begin{cases} -x & \text{เมื่อ } x<0 \\ x & \text{เมื่อ } x\geq 0 \end{cases}$

และ $|x-3| = \begin{cases} -(x-3) & \text{เมื่อ } x<3 \\ x-3 & \text{เมื่อ } x\geq 3 \end{cases}$

จะได้ว่า

$$\lim_{x\to 3^-}\frac{|x|-3}{|x-3|} = \lim_{x\to 3^-}\frac{x-3}{-(x-3)} = \lim_{x\to 3^-} -1 = -1$$

และ

$$\lim_{x\to 3^+}\frac{|x|-3}{|x-3|} = \lim_{x\to 3^+}\frac{x-3}{x-3} = \lim_{x\to 3^+} 1 = 1$$

ดังนั้น $\lim\limits_{x\to 3}\dfrac{|x|-3}{|x-3|}$ ไม่มีค่า $\square$

ตัวอย่าง 1.2.5. กำหนดให้ $f(x) = \begin{cases} (x-1)^2 & , \quad x\leq 0 \\ \dfrac{1}{1+x} & , \quad 0<x<1 \\ 5x-3 & , \quad x\geq 1 \end{cases}$

จงหาค่าของ $\lim\limits_{x\to 0} f(x)$, $\lim\limits_{x\to 1} f(x)$ และ $\lim\limits_{x\to 2} f(x)$ ถ้าลิมิตมีค่า

<u>**วิธีทำ**</u> 1. พิจารณา $\lim\limits_{x\to 0} f(x)$ จะได้ว่า

$$\lim_{x\to 0^-} f(x) = \lim_{x\to 0^-}(x-1)^2 = 1$$

และ

$$\lim_{x\to 0^+} f(x) = \lim_{x\to 0^+}\frac{1}{1+x} = 1$$

ดังนั้น $\lim_{x\to 0} f(x) = 1$

2. พิจารณา $\lim_{x\to 1} f(x)$ จะได้ว่า

$$\lim_{x\to 1^-} f(x) = \lim_{x\to 1^-} \frac{1}{1+x} = \frac{1}{2}$$

และ

$$\lim_{x\to 1^+} f(x) = \lim_{x\to 1^+} (5x-3) = 2$$

ดังนั้น $\lim_{x\to 1} f(x)$ ไม่มีค่า

3. พิจารณา $\lim_{x\to 2} f(x) = \lim_{x\to 2^-} (5x-3) = 7$ $\square$

ตัวอย่าง 1.2.6. จงหาค่าของ $\lim_{x\to 2} \dfrac{5x^3+4}{x-3}$

<u>**วิธีทำ**</u>
$$\lim_{x\to 2} \frac{5x^3+4}{x-3} = \frac{\lim_{x\to 2}(5x^3+4)}{\lim_{x\to 2}(x-3)} = \frac{5\cdot 2^3+4}{2-3} = -44$$ $\square$

ในบางครั้งเราไม่สามารถใช้ทฤษฎีบท 1.2.1(7) ได้เพราะว่า $M = 0$ เช่น

$$\lim_{x\to 2} \frac{x^2-4}{x-2} \neq \frac{\lim_{x\to 2}(x^2-4)}{\lim_{x\to 2}(x-2)}$$

ตัวอย่าง 1.2.7. จงหาค่าของลิมิตต่อไปนี้ ถ้าลิมิตมีค่า

1. $\lim_{x\to -3} \dfrac{2x^2+x-15}{x+3}$
2. $\lim_{h\to 0} \dfrac{1}{h}\left(\dfrac{1}{a+h} - \dfrac{1}{a}\right), a \neq 0$
3. $\lim_{x\to 0} \dfrac{\sqrt{1-x}-1}{x}$
4. $\lim_{x\to 2} \dfrac{x^{\frac{2}{3}} - 4^{\frac{1}{3}}}{x-2}$

<u>**วิธีทำ**</u> 1.
$$\begin{aligned}\lim_{x\to -3}\frac{2x^2+x-15}{x+3} &= \lim_{x\to -3}\frac{(2x-5)(x+3)}{x+3}\\ &= \lim_{x\to -3}(2x-5) = 2(-3)-5 = -11\end{aligned}$$

2.
$$\begin{aligned}\lim_{h\to 0}\frac{1}{h}\Big(\frac{1}{a+h}-\frac{1}{a}\Big) &= \lim_{h\to 0}\Big(\frac{1}{h}\cdot\frac{a-(a+h)}{a(a+h)}\Big)\\ &= \lim_{h\to 0}\frac{-h}{ha(a+h)}\\ &= \lim_{h\to 0}\frac{-1}{a(a+h)}\\ &= \frac{-1}{a(a+0)} = -\frac{1}{a^2}\end{aligned}$$

3.
$$\begin{aligned}\lim_{x\to 0}\frac{\sqrt{1-x}-1}{x} &= \lim_{x\to 0}\Big(\frac{\sqrt{1-x}-1}{x}\cdot\frac{\sqrt{1-x}+1}{\sqrt{1-x}+1}\Big)\\ &= \lim_{x\to 0}\frac{(1-x)-1}{x(\sqrt{1-x}+1)}\\ &= \lim_{x\to 0}\frac{-x}{x(\sqrt{1-x}+1)}\\ &= \lim_{x\to 0}\frac{-1}{\sqrt{1-x}+1}\\ &= \frac{-1}{\sqrt{1-0}+1} = -\frac{1}{2}\end{aligned}$$

4.
$$\begin{aligned}\lim_{x\to 2}\frac{x^{\frac{2}{3}}-4^{\frac{1}{3}}}{x-2} &= \lim_{x\to 2}\frac{x^{\frac{2}{3}}-2^{\frac{2}{3}}}{x-2}\\ &= \lim_{x\to 2}\frac{(x^{\frac{1}{3}}-2^{\frac{1}{3}})(x^{\frac{1}{3}}+2^{\frac{1}{3}})}{(x^{\frac{1}{3}}-2^{\frac{1}{3}})(x^{\frac{2}{3}}+x^{\frac{1}{3}}\cdot 2^{\frac{1}{3}}+2^{\frac{2}{3}})}\\ &= \lim_{x\to 2}\frac{x^{\frac{1}{3}}+2^{\frac{1}{3}}}{x^{\frac{2}{3}}+x^{\frac{1}{3}}\cdot 2^{\frac{1}{3}}+2^{\frac{2}{3}}}\\ &= \frac{2^{\frac{1}{3}}+2^{\frac{1}{3}}}{2^{\frac{2}{3}}+2^{\frac{1}{3}}\cdot 2^{\frac{1}{3}}+2^{\frac{2}{3}}} = \frac{\sqrt[3]{4}}{3}\end{aligned}$$

□

ตัวอย่าง 1.2.8. กำหนดให้ $-x^2+2x+8 \le f(x) \le 9$ สำหรับทุก $x \in \mathbb{R} \setminus \{1\}$ จงหาค่าของ $\lim\limits_{x\to 1} f(x)$

<u>**วิธีทำ**</u> เนื่องจาก $\lim\limits_{x\to 1}(-x^2+2x+8) = -1^2+2(1)+8 = 9 = \lim\limits_{x\to 1} 9$
ดังนั้น โดยทฤษฎีบทที่ 1.2.1(11) จะได้ว่า $\lim\limits_{x\to 1} f(x) = 9$ □

ตัวอย่าง 1.2.9. จงหาค่าของ $\lim_{x\to 0} x^2 \cos\frac{1}{x}$

<u>วิธีทำ</u> เนื่องจาก $-1 \leq \cos\frac{1}{x} \leq 1$ สำหรับทุก $x \in \mathbb{R}$ ซึ่ง $x \neq 0$

จะได้ว่า $-x^2 \leq x^2\cos\frac{1}{x} \leq x^2$ สำหรับทุก $x \in \mathbb{R}$ ซึ่ง $x \neq 0$

และ $\lim_{x\to 0}(-x^2) = \lim_{x\to 0} x^2 = 0$ โดยทฤษฎีบทที่ 1.2.1(11) จะได้ว่า $\lim_{x\to 0} x^2\cos\frac{1}{x} = 0$

$\square$

แบบฝึกหัด 1.2

จงหาค่าลิมิตต่อไปนี้

1. $\lim\limits_{x\to 4} 5$
2. $\lim\limits_{x\to -2}(5-3x)$
3. $\lim\limits_{x\to -4}\sqrt{4x^2-4x+1}$
4. $\lim\limits_{x\to 4}\sqrt[3]{\dfrac{2x}{1-7x}}$
5. $\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{x^2-4}{8-x^3}$
6. $\lim\limits_{x\to 4}\dfrac{16-x^2}{x+\sqrt{x}-6}$
7. $\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{x^3+3x^2-12x+4}{x^3-4x}$
8. $\lim\limits_{x\to 4}\dfrac{x-4}{2-\sqrt{x}}$
9. $\lim\limits_{x\to 2}\left(\dfrac{1}{x-2}-\dfrac{4}{x^2-4}\right)$
10. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sqrt{x+1}-1}{x}$
11. $\lim\limits_{x\to 4}\dfrac{\sqrt{x+5}-3}{x-4}$
12. $\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{2-\sqrt[3]{x+6}}{x-2}$
13. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sqrt{3+\sqrt{x+1}}-2}{x}$
14. $\lim\limits_{x\to -2}\dfrac{8x^{-3}+2x^{-2}+x^{-1}+1}{x+2}$
15. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sqrt[4]{x^4+1}-\sqrt{x^2+1}}{x^2}$

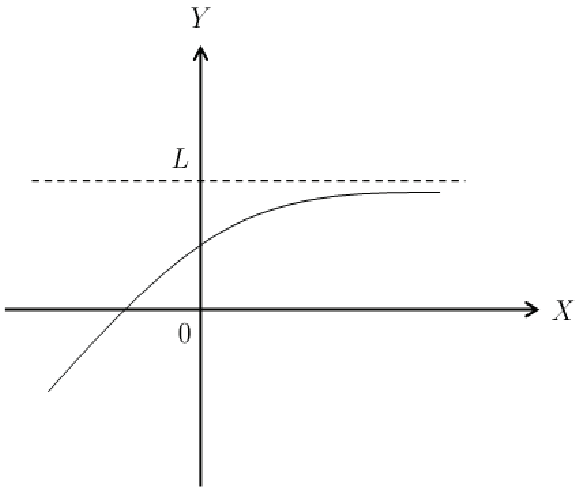
เฉลยแบบฝึกหัด 1.2

1. 5	2. 11	3. 9	4. $-\frac{2}{3}$	5. $-\frac{1}{3}$
6. $-\frac{32}{5}$	7. $\frac{3}{2}$	8. -4	9. $\frac{1}{4}$	10. $\frac{1}{2}$
11. $\frac{1}{6}$	12. $-\frac{1}{12}$	13. $\frac{1}{8}$	14. $-\frac{5}{4}$	15. $-\frac{1}{2}$

1.3 ลิมิตที่ค่าอนันต์

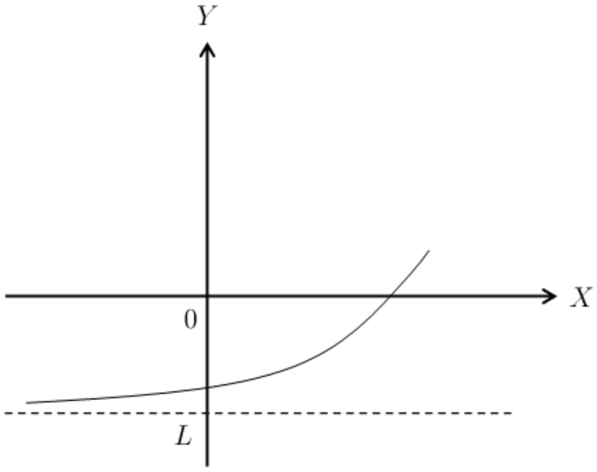
ในการหาลิมิตของฟังก์ชันที่ผ่านมานั้น เราจะพิจารณาค่าของลิมิตของฟังก์ชัน $f(x)$ ในขณะที่ x มีค่าเข้าใกล้ a ในหัวข้อนี้เราจะกล่าวถึงลิมิตของฟังก์ชันในขณะที่ x มีค่ามากขึ้นอย่างไม่มีขอบเขต หรือ x มีค่าน้อยลงอย่างไม่มีขอบเขต

พิจารณากราฟของฟังก์ชัน $y = f(x)$



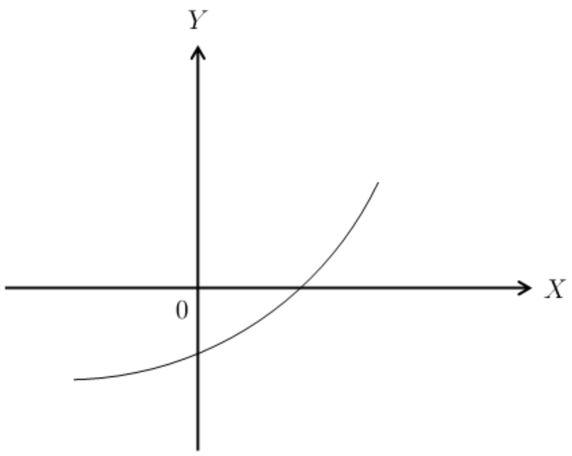
รูปที่ 1.3: ลิมิตของ $f(x)$ ในขณะที่ x มีค่าเข้าใกล้ค่าบวกอนันต์

จากรูปที่ 1.3 จะเห็นว่า เมื่อ x มีค่ามากขึ้นจนไม่มีขอบเขตค่าของ $f(x)$ มีค่าเข้าใกล้ L ในกรณีเช่นนี้ เราจะกล่าวว่า *ลิมิตของ* $f(x)$ *ในขณะที่* x *มีค่าเข้าใกล้ค่าบวกอนันต์มีค่าเท่ากับ* L และเขียนแทนด้วย $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = L$



รูปที่ 1.4: ลิมิตของ $f(x)$ ในขณะที่ x มีค่าเข้าใกล้ค่าลบอนันต์

จากรูปที่ 1.4 จะเห็นว่า เมื่อ x มีค่าน้อยลงจนไม่มีขอบเขตค่าของ $f(x)$ มีค่าเข้าใกล้ L ในกรณีเช่นนี้ เราจะกล่าวว่า *ลิมิตของ* $f(x)$ *ในขณะที่* x *มีค่าเข้าใกล้ค่าลบอนันต์มีค่าเท่ากับ* L และเขียนแทนด้วย $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = L$

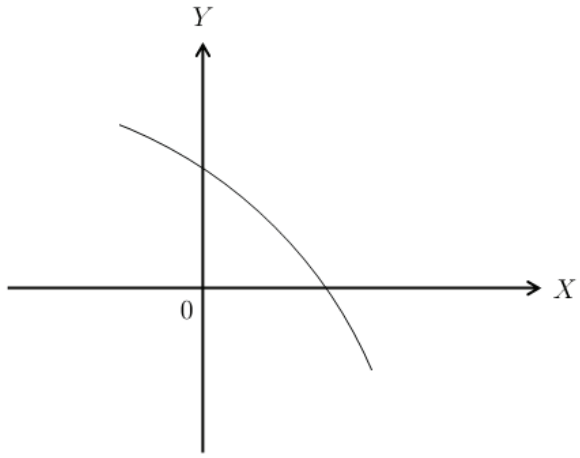


รูปที่ 1.5: ลิมิตของ $f(x)$ ในขณะที่ x มีค่าเข้าใกล้ค่าบวกอนันต์

จากรูปที่ 1.5 จะเห็นว่า เมื่อ x มีค่ามากขึ้นจนไม่มีขอบเขตค่าของ $f(x)$ มีค่ามากขึ้น ในกรณีเช่นนี้ เราจะกล่าวว่า *ลิมิตของ* $f(x)$ *ในขณะที่* x *มีค่าเข้าใกล้ค่าบวกอนันต์มีค่า*

เท่ากับบวกอนันต์ และเขียนแทนด้วย $\lim_{x\to+\infty} f(x) = +\infty$

ทำนองเดียวกันสำหรับ $\lim_{x\to-\infty} f(x) = -\infty$



รูปที่ 1.6: $\lim_{x\to+\infty} f(x) = -\infty$

จากรูปที่ 1.6 จะเห็นว่าเมื่อ x มีค่ามากขึ้นจนไม่มีขอบเขตค่าของ $f(x)$ มีค่าน้อยลง ในกรณีเช่นนี้ เราจะกล่าวว่า *ลิมิตของ $f(x)$ ในขณะที่ x มีค่าเข้าใกล้ค่าบวกอนันต์มีค่าเท่ากับลบอนันต์* และเขียนแทนด้วย $\lim_{x\to+\infty} f(x) = -\infty$

ทำนองเดียวกันสำหรับ $\lim_{x\to-\infty} f(x) = +\infty$

ทฤษฎีบท 1.3.1. $\lim_{x\to+\infty} \frac{1}{x} = 0$ และ $\lim_{x\to-\infty} \frac{1}{x} = 0$

ทฤษฎีบท 1.3.2. ให้ L และ M เป็นจำนวนจริง ถ้า $\lim_{x\to+\infty} f(x) = L$ และ $\lim_{x\to+\infty} g(x) = M$ แล้วจะได้ว่า

1. $\lim_{x\to+\infty} k = k$ เมื่อ k เป็นค่าคงตัว

2. $\lim_{x\to+\infty} kf(x) = k\big(\lim_{x\to+\infty} f(x)\big) = kL$ เมื่อ k เป็นค่าคงตัว

3. $\lim_{x\to+\infty} (f(x) + g(x)) = \lim_{x\to+\infty} f(x) + \lim_{x\to+\infty} g(x) = L + M$

4. $\lim\limits_{x\to+\infty}(f(x)-g(x)) = \lim\limits_{x\to+\infty} f(x) - \lim\limits_{x\to+\infty} g(x) = L - M$

5. $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)g(x) = \big(\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)\big)\big(\lim\limits_{x\to+\infty} g(x)\big) = LM$

6. $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{f(x)}{g(x)} = \dfrac{L}{M}$ เมื่อ $M \neq 0$

7. $\lim\limits_{x\to+\infty} \sqrt[n]{f(x)} = \sqrt[n]{\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)} = \sqrt[n]{L}$

หมายเหตุ ทฤษฎีบทดังกล่าว ยังคงเป็นจริงสำหรับการแทนด้วย $x \to -\infty$

ตัวอย่าง 1.3.3. จงหาค่าของลิมิตต่อไปนี้ (ถ้ามี)

1. $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{7-3x^2}{5x+x^2}$
2. $\lim\limits_{x\to-\infty} \dfrac{(1-x)^3}{3x^3-4x+5}$
3. $\lim\limits_{x\to-\infty} \dfrac{2x+3}{\sqrt{7x^2-4}}$
4. $\lim\limits_{x\to+\infty} (\sqrt{x^2+3x}-x)$

วิธีทำ

1. $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{7-3x^2}{5x+x^2} = \lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{7/x^2-3}{5/x+1} = \dfrac{0-3}{0+1} = -3$

2. $$\begin{aligned}\lim_{x\to-\infty} \frac{(1-x)^3}{3x^3-4x+5} &= \lim_{x\to-\infty} \frac{1-3x+3x^2-x^3}{3x^3-4x+5} \\ &= \lim_{x\to-\infty} \frac{1/x^3-3/x^2+3/x-1}{3-4/x^2+5/x^3} = -\frac{1}{3}\end{aligned}$$

3. $$\begin{aligned}\lim_{x\to-\infty} \frac{2x+3}{\sqrt{7x^2-4}} &= \lim_{x\to-\infty} \frac{2x+3}{\sqrt{x^2(7-4/x^2)}} \\ &= \lim_{x\to-\infty} \frac{2x+3}{|x|\sqrt{7-4/x^2}} \qquad (\because \sqrt{x^2} = |x|) \\ &= \lim_{x\to-\infty} \frac{2x+3}{(-x)\sqrt{7-4/x^2}} \qquad (\because |x| = -x \text{ เมื่อ } x < 0) \\ &= -\lim_{x\to-\infty} \frac{2+3/x}{\sqrt{7-4/x^2}} \\ &= -\frac{2+0}{\sqrt{7-0}} = -\frac{2}{\sqrt{7}}\end{aligned}$$

4. $$\begin{aligned}\lim_{x\to+\infty}(\sqrt{x^2+3x}-x) &= \lim_{x\to+\infty}(\sqrt{x^2+3x}-x)\cdot\frac{\sqrt{x^2+3x}+x}{\sqrt{x^2+3x}+x}\\ &= \lim_{x\to+\infty}\frac{x^2+3x-x^2}{\sqrt{x^2+3x}+x}\\ &= \lim_{x\to+\infty}\frac{3x}{\sqrt{x^2+3x}+x}\\ &= \lim_{x\to+\infty}\frac{3x}{\sqrt{x^2}+x}\\ &= \frac{3}{1+1}=\frac{3}{2}\end{aligned}$$ □

แบบฝึกหัด 1.3

จงหาค่าลิมิตต่อไปนี้

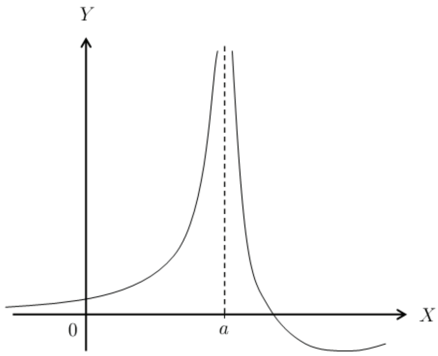
1. $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{2x+3}{5x+7}$
2. $\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{2x+4}{4-5x}$
3. $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{\sqrt{x^2+4}}{x+4}$
4. $\lim\limits_{x\to+\infty}(\sqrt{x^2+1}-x)$
5. $\lim\limits_{x\to+\infty}(\sqrt{3x^2+x}-2x)$
6. $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{\sqrt{x+\sqrt{x+\sqrt{x}}}}{\sqrt{x+1}}$
7. $\lim\limits_{x\to+\infty}\sqrt[3]{\dfrac{3+2x-5x^2}{1+8x^2}}$
8. $\lim\limits_{x\to+\infty}(\sqrt{x^2+x}-x)$
9. $\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{\sqrt{5x^2-2}}{x+3}$
10. $\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{\sqrt{3x^4+5x+1}}{x^2-9}$
11. $\lim\limits_{x\to+\infty}(\sqrt{x^2+3x}-\sqrt{x^2+2x})$
12. $\lim\limits_{x\to+\infty}(\sqrt{x^6-5x^3}-x^3)$
13. $\lim\limits_{x\to+\infty}(\sqrt{x^6+5}-x^3)$

เฉลยแบบฝึกหัด 1.3

1. $\frac{2}{5}$	2. $-\frac{2}{5}$	3. 1	4. 0	5. $-\infty$
6. 1	7. $-\frac{\sqrt[3]{5}}{2}$	8. $\frac{1}{2}$	9. $-\sqrt{5}$	10. $\sqrt{3}$
11. $\frac{1}{2}$	12. $-\frac{5}{2}$	13. 0		

1.4 ลิมิตค่าอนันต์

ก่อนอื่นเราจะพิจารณาลักษณะของกราฟของฟังก์ชัน $y = f(x)$ ดังรูปต่อไปนี้

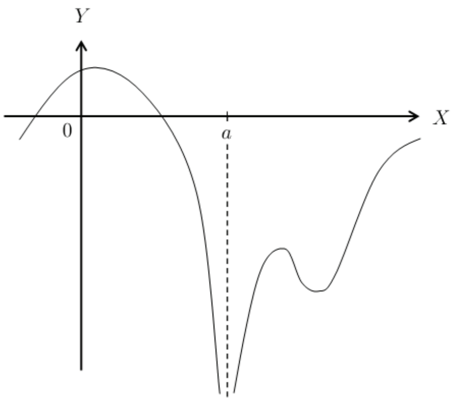


รูปที่ 1.7: $\lim\limits_{x \to a} f(x) = +\infty$

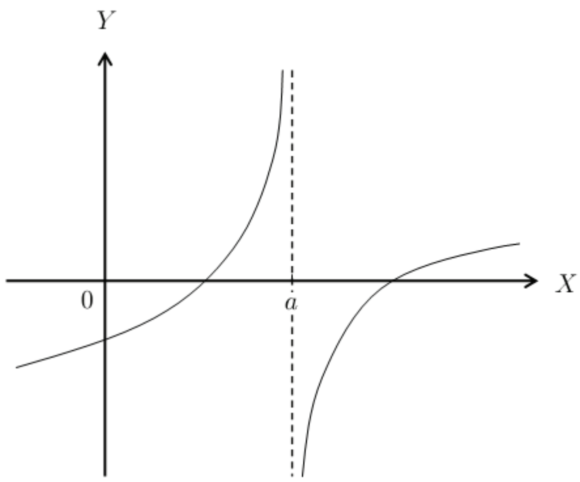
จากรูปที่ 1.7 จะเห็นว่า เมื่อ x มีค่าเข้าใกล้ a นั้น $f(x)$ มีค่ามากขึ้นจนไม่มีขอบเขต ลักษณะเช่นนี้ เราจะกล่าวว่า *ลิมิตของ* $f(x)$ *ในขณะที่* x *มีค่าเข้าใกล้* a *มีค่าเป็นบวกอนันต์* และเขียนแทนด้วย $\lim\limits_{x \to a} f(x) = +\infty$

จากรูปที่ 1.8 จะเห็นว่า เมื่อ x มีค่าเข้าใกล้ a นั้น $f(x)$ มีค่าน้อยลงจนไม่มีขอบเขต ลักษณะเช่นนี้ เราจะกล่าวว่า *ลิมิตของ* $f(x)$ *ในขณะที่* x *มีค่าเข้าใกล้* a *มีค่าเป็นลบอนันต์* และเขียนแทนด้วย $\lim\limits_{x \to a} f(x) = -\infty$

จากรูปที่ 1.9 จะเห็นว่า เมื่อ x มีค่าเข้าใกล้ a ทางซ้ายนั้น $f(x)$ มีค่ามากขึ้นจนไม่มีขอบเขต ลักษณะเช่นนี้ เราจะกล่าวว่า *ลิมิตของ* $f(x)$ *ในขณะที่* x *มีค่าเข้าใกล้* a *ทางซ้ายมีค่าเป็นบวกอนันต์* และจะเขียนแทนด้วย $\lim\limits_{x \to a^-} f(x) = +\infty$ และ เมื่อ x มีค่าเข้าใกล้ a

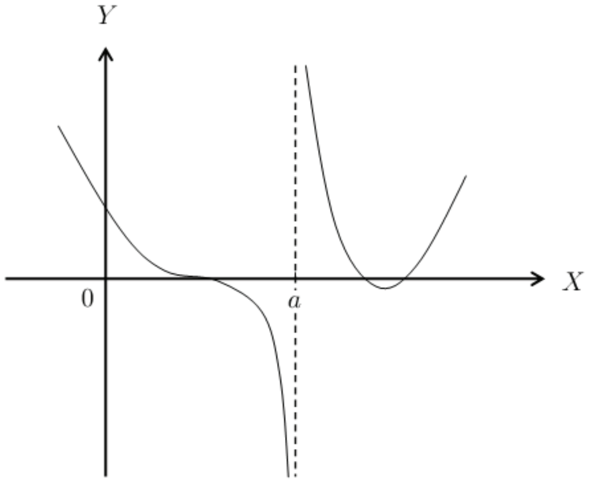


รูปที่ 1.8: $\lim_{x \to a} f(x) = -\infty$



รูปที่ 1.9: $\lim_{x \to a^-} f(x) = +\infty$

ทางขวา $f(x)$ มีค่าน้อยลงจนไม่มีขอบเขต และเราจะกล่าวว่า *ลิมิตของ* $f(x)$ *ในขณะที่* x *มีค่าเข้าใกล้* a *ทางซ้ายมีค่าเป็นลบอนันต์* และเขียนแทนด้วย $\lim_{x \to a^+} f(x) = -\infty$



รูปที่ 1.10: $\lim_{x\to a^-} f(x) = -\infty$ และ $\lim_{x\to a^+} f(x) = +\infty$

ทำนองเดียวกันจากรูปที่ 1.10 จะได้ว่า $\lim_{x\to a^-} f(x) = -\infty$ และ $\lim_{x\to a^+} f(x) = +\infty$ เราจะเรียกลิมิตทั้งหมดในข้างต้นว่า *ลิมิตค่าอนันต์* (infinity limit)

ข้อตกลง สัญลักษณ์ $+\infty$ และ $-\infty$ **ไม่ใช่จำนวนจริง** ดังนั้นเราอาจกล่าวว่า $\lim_{x\to a} f(x) = \infty$ หรือ $\lim_{x\to a} f(x) = -\infty$ ว่า $\lim_{x\to a} f(x)$ ไม่มีค่า

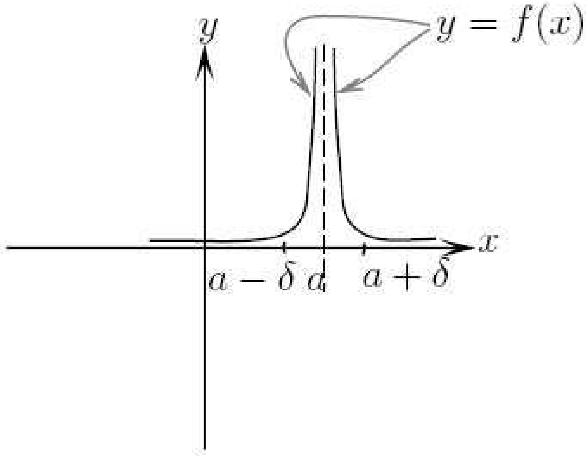
ทฤษฎีบท 1.4.1. ให้ f และ g เป็นฟังก์ชัน ถ้า $\lim_{x\to a} f(x) = L$ เมื่อ $L \neq 0$ และ $\lim_{x\to a} g(x) = 0$ แล้วจะได้ว่า

1. ถ้ามีจำนวนจริงบวก δ ที่ทำให้ $g(x) > 0$ ทุก x ซึ่ง $a - \delta < x < a + \delta$ แล้วจะได้ว่า

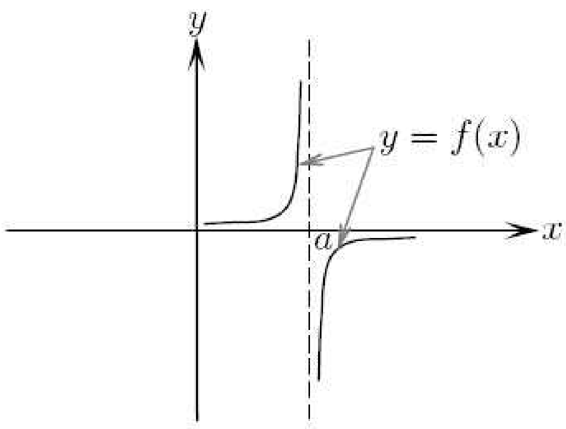
$$\lim_{x\to a} \frac{f(x)}{g(x)} = \begin{cases} -\infty & \text{เมื่อ} \quad L < 0 \\ +\infty & \text{เมื่อ} \quad L > 0 \end{cases}$$

2. ถ้ามีจำนวนจริงบวก δ ที่ทำให้ $g(x) < 0$ ทุก x ซึ่ง $a - \delta < x < a + \delta$ แล้วจะได้ว่า

$$\lim_{x\to a} \frac{f(x)}{g(x)} = \begin{cases} +\infty & \text{เมื่อ} \quad L < 0 \\ -\infty & \text{เมื่อ} \quad L > 0 \end{cases}$$



รูปที่ 1.11: $\lim_{x \to a} f(x) = +\infty$



รูปที่ 1.12: $\lim_{x \to a^-} f(x) = +\infty$

ทำนองเดียวกัน ทฤษฎีบท 1.4.1 ยังเป็นจริงสำหรับ $x \to a^+$, $x \to a^-$, $x \to +\infty$ และ $x \to -\infty$

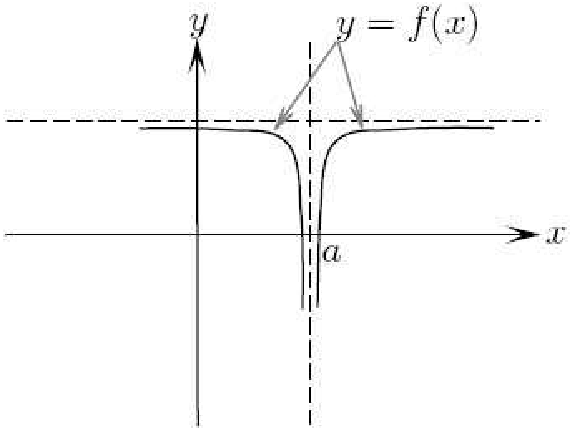
ตัวอย่าง 1.4.2. กำหนดให้ $f(x) = \dfrac{3x}{x-2}$ จงหาค่า $\lim_{x \to 0^-} f(x)$ และ $\lim_{x \to 0^+} f(x)$

<u>วิธีทำ</u> จาก $\lim_{x \to 2} 3x = 6$ โดยทฤษฎีบท 1.4.1 จะได้ว่า

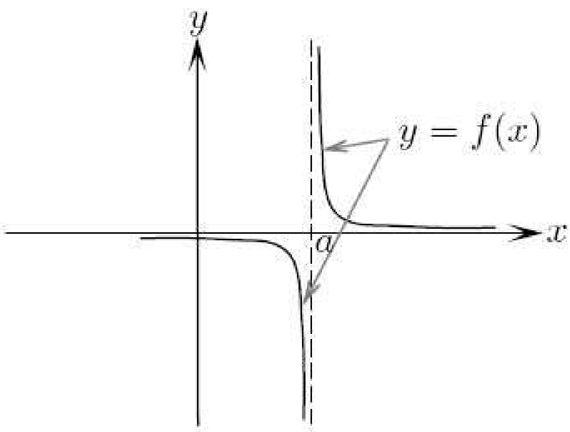
เมื่อ $x < 2$ **นั่นคือ** $x - 2 < 0$ **ดังนั้น** $\lim\limits_{x \to 2^-} \dfrac{3x}{x-2} = -\infty$

เมื่อ $x > 2$ **นั่นคือ** $x - 2 > 0$ **ดังนั้น** $\lim\limits_{x \to 2^+} \dfrac{3x}{x-2} = +\infty$

ดังนั้น $\lim\limits_{x \to 2} \dfrac{3x}{x-2}$ **ไม่มีค่า** □



รูปที่ 1.13: $\lim\limits_{x \to a} f(x) = -\infty$



รูปที่ 1.14: $\lim\limits_{x \to a^-} f(x) = -\infty$

ตัวอย่าง 1.4.3. จงหา $\lim\limits_{x\to 1^+} \dfrac{x+1}{x^2-3x+2}$

<u>วิธีทำ</u> เนื่องจาก $\lim\limits_{x\to 1+}(x+1) = 2$, $\lim\limits_{x\to 1^+}(x^2+2x-3) = 0$ และ $x^2+2x-3 > 0$ สำหรับทุก $x > 1$ ดังนั้น $\lim\limits_{x\to 1^+} \dfrac{x+1}{x^2-3x+2} = +\infty$

และเนื่องจาก $\lim\limits_{x\to -3^+}(x+1) = -2$, $\lim\limits_{x\to -3^+}(x^2+2x-3) = 0$ และ $x^2+2x-3 < 0$ สำหรับทุก $x \in (-3, 1)$ ดังนั้น $\lim\limits_{x\to -3^+} \dfrac{x+1}{x^2-3x+2} = +\infty$ □

ตัวอย่าง 1.4.4. จงหา $\lim\limits_{x\to 0}(\dfrac{4}{x^2} - \dfrac{3}{x} - 1)$

<u>วิธีทำ</u> จาก $f(x) = \dfrac{4}{x^2} - \dfrac{3}{x} - 1 = \dfrac{4-3x-x^2}{x^2} = -\dfrac{(x+4)(x-1)}{x^2}$

เนื่องจาก $\lim\limits_{x\to 0} x^2 = 0$, $\lim\limits_{x\to 0}(4-3x-x^2) = 4$ และ $x^2 > 0$ สำหรับทุก $x \neq 0$

ดังนั้น $\lim\limits_{x\to 0}(\dfrac{4}{x^2} - \dfrac{3}{x} - 1) = +\infty$ □

แบบฝึกหัด 1.4

จงพิจารณาลิมิตต่อไปนี้ว่าหาค่าได้หรือไม่ ถ้าหาค่าได้จงหาค่าลิมิตดังกล่าว

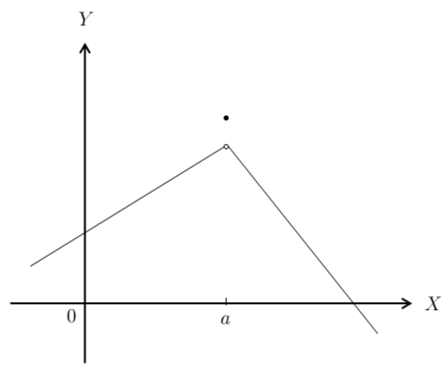
1. $\lim\limits_{x\to 0^-} \dfrac{\sqrt{x^2+3}}{x}$
2. $\lim\limits_{x\to 3^+} \dfrac{\sqrt{x^2-9}}{x-3}$
3. $\lim\limits_{x\to 0^-} \dfrac{2-4x^3}{5x^2+3x^3}$
4. $\lim\limits_{x\to 1^+} \dfrac{x-1}{\sqrt{2x-x^2}-1}$
5. $\lim\limits_{x\to 3} \dfrac{-1}{(x-3)^2}$
6. $\lim\limits_{x\to 2} \dfrac{4x}{x-2}$
7. $\lim\limits_{x\to -2^-} \dfrac{1}{\sqrt{-x-2}}$
8. $\lim\limits_{x\to 0^+} \dfrac{4+\sqrt{1+x^2}}{x}$
9. $\lim\limits_{x\to 2^+} \dfrac{4x+3}{x^2-4}$
10. $\lim\limits_{x\to 1} \dfrac{x-5}{(x-1)^2}$

เฉลยแบบฝึกหัด 1.4

1. $-\infty$	2. $+\infty$	3. $+\infty$	4. $-\infty$	5. $-\infty$
6. ไม่มีค่า	7. $+\infty$	8. $+\infty$	9. $+\infty$	10. $-\infty$

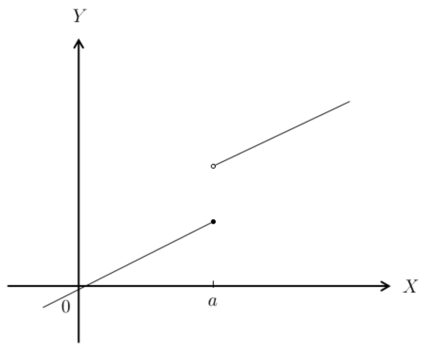
1.5 ความต่อเนื่องของฟังก์ชัน

พิจารณาลักษณะของกราฟของฟังก์ชัน $y = f(x)$ ดังรูปต่อไปนี้

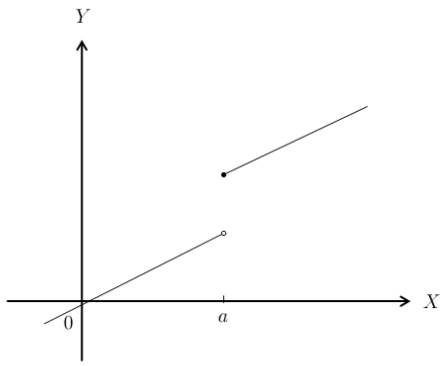


รูปที่ 1.15: $\lim\limits_{x\to a} f(x)$ และ $f(a)$ มีค่า แต่ $\lim\limits_{x\to a} f(x) \neq f(a)$

จากรูปที่ 1.15 จะเห็นว่า $\lim\limits_{x\to a} f(x)$ และ $f(a)$ มีค่า แต่ $\lim\limits_{x\to a} f(x) \neq f(a)$
จากรูปที่ 1.16 จะเห็นว่า $f(a) = \lim\limits_{x\to a^-} f(x) \neq \lim\limits_{x\to a^+} f(x)$ ดังนั้น $\lim\limits_{x\to a} f(x)$ ไม่มีค่า



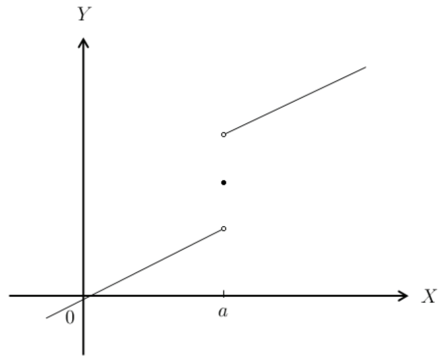
รูปที่ 1.16: $\lim_{x\to a} f(x)$ ไม่มีค่า



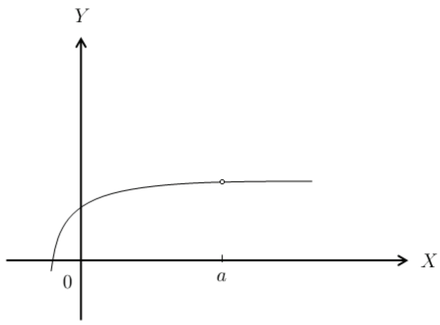
รูปที่ 1.17: $\lim_{x\to a} f(x)$ ไม่มีค่า

จากรูปที่ 1.17 จะเห็นว่า $\lim_{x\to a^-} f(x) \neq \lim_{x\to a^+} f(x) = f(a)$ ดังนั้น $\lim_{x\to a} f(x)$ ไม่มีค่า

จากรูปที่ 1.18 จะเห็นว่า $\lim_{x\to a^-} f(x) \neq \lim_{x\to a^+} f(x)$ ดังนั้น $\lim_{x\to a} f(x)$ ไม่มีค่า แต่ $f(a)$ มีค่า



รูปที่ 1.18: $\lim_{x\to a} f(x)$ ไม่มีค่า แต่$f(a)$ มีค่า



รูปที่ 1.19: $\lim_{x\to a} f(x)$ มีค่า แต่$f(a)$ ไม่มีค่า

จากรูปที่ 1.19 จะเห็นว่า $\lim_{x\to a^-} f(x) = \lim_{x\to a^+} f(x)$ ดังนั้น $\lim_{x\to a} f(x)$ มีค่า แต่$f(a)$ ไม่มีค่า

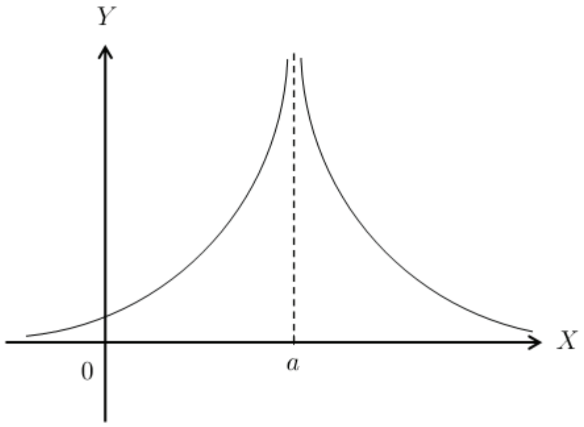
จากรูปที่ 1.20 จะเห็นว่าทั้ง $\lim_{x\to a^-} f(x), \lim_{x\to a^+} f(x)$ และ $f(a)$ ไม่มีค่า

บทนิยาม 1.5.1. ให้ f เป็นฟังก์ชันค่าจริงและ $a \in \mathbb{R}$ เราจะกล่าวว่า f *ต่อเนื่องที่จุด* $x = a$ *ก็ต่อเมื่อ*

1. $f(a)$ มีค่า
2. $\lim_{x\to a} f(x)$ มีค่า

และ 3. $\lim_{x\to a} = f(a)$

ถ้าขาดเงื่อนไขใดในสามข้อดังกล่าว แล้วเราจะกล่าวว่า f *ไม่ต่อเนื่องที่จุด* $x = a$



รูปที่ 1.20: ทั้ง $\lim\limits_{x\to a^-} f(x), \lim\limits_{x\to a^+} f(x)$ และ $f(a)$ ไม่มีค่า

ตัวอย่าง 1.5.2. กำหนดให้ $f(x) = \begin{cases} x^2 & \text{เมื่อ } x < -1 \\ 2x+1 & \text{เมื่อ } -1 \le x < 2 \\ x^2+1 & \text{เมื่อ } x \ge 2 \end{cases}$

จงพิจารณาว่า f ต่อเนื่องที่จุด $x = -1$ และ $x = 2$ หรือไม่ เพราะเหตุใด

<u>วิธีทำ</u> พิจารณาที่จุด $x = -1$ จะได้ว่า

1. $f(-1) = 2(-1) + 1 = -1$
2. $\lim\limits_{x\to -1^-} f(x) = \lim\limits_{x\to -1^-} x^2 = 1$

จะเห็นว่า $\lim\limits_{x\to -1^-} f(x) \neq f(-1)$ ดังนั้น f ไม่ต่อเนื่องที่จุด $x = -1$

พิจารณาที่จุด $x = 2$ จะได้ว่า

1. $f(2) = 2^2 + 1 = 5$
2. $\lim\limits_{x\to 2^-} f(x) = \lim\limits_{x\to 2^-} (2x+1) = 5$ และ $\lim\limits_{x\to 2^+} f(x) = \lim\limits_{x\to 2^+} (x^2+1) = 5$
   ดังนั้น $\lim\limits_{x\to 2} f(x) = 5$
3. $\lim\limits_{x\to 2} f(x) = 5 = f(2)$

$\therefore f$ ต่อเนื่องที่จุด $x = 2$ $\square$

ตัวอย่าง 1.5.3. กำหนดให้ $f(x) = \sqrt{x^2 - 1}$ จงพิจารณาว่า f ต่อเนื่องที่จุด $x = 1$ หรือไม่เพราะเหตุใด

วิธีทำ เพราะว่า $f(1) = \sqrt{1-1} = 0$ และ $\lim\limits_{x \to 1} \sqrt{x^2 - 1} = 0$

ดังนั้น $\lim\limits_{x \to 1} f(x) = f(1) \therefore f$ ต่อเนื่องที่ $x = 1$ $\square$

บทนิยาม 1.5.4. ให้ f เป็นฟังก์ชันค่าจริง และ $a \in \mathbb{R}$ เราจะกล่าวว่า f *ต่อเนื่องทางซ้ายที่* $x = a$ *ก็ต่อเมื่อ*

1. $f(a)$ มีค่า
2. $\lim\limits_{x \to a^-} f(x)$ มีค่า

และ 3. $\lim\limits_{x \to a^-} f(x) = f(a)$

บทนิยาม 1.5.5. ให้ f เป็นฟังก์ชันค่าจริง และ $a \in \mathbb{R}$ เราจะกล่าวว่า f *ต่อเนื่องทางขวาที่* $x = a$ *ก็ต่อเมื่อ*

1. $f(a)$ มีค่า
2. $\lim\limits_{x \to a^+} f(x)$ มีค่า

และ 3. $\lim\limits_{x \to a^+} f(x) = f(a)$

เราได้กล่าวถึงความต่อเนื่องที่จุดมาแล้ว ต่อไปเราจะกล่าวถึงความต่อเนื่องบนเซต นิยามดังนี้

บทนิยาม 1.5.6. ให้ f เป็นฟังก์ชันค่าจริง เราจะกล่าวว่า

1. f *ต่อเนื่องบนโดเมน* ก็ต่อเมื่อ f ต่อเนื่องที่ทุกจุดในโดเมนของ f
2. f *ต่อเนื่องบน* (a, b) ก็ต่อเมื่อ f ต่อเนื่องที่ทุกจุด $x \in (a, b)$
3. f *ต่อเนื่องบน* $(a, b]$ ก็ต่อเมื่อ

   3.1 f ต่อเนื่องทางขวาที่จุด $x = a$ และ

   3.2 f ต่อเนื่องบน (a, b)

4. f *ต่อเนื่องบน* $[a,b)$ ก็ต่อเมื่อ

    4.1 f ต่อเนื่องบน (a,b) และ

    4.2 f ต่อเนื่องทางซ้ายที่จุด $x=b$

5. f *ต่อเนื่องบน* $[a,b]$ ก็ต่อเมื่อ

    5.1 f ต่อเนื่องทางขวาที่จุด $x=a$

    5.2 f ต่อเนื่องบน (a,b) และ

    5.3 f ต่อเนื่องทางซ้ายที่จุด $x=b$

ตัวอย่าง 1.5.7. กำหนดให้ $f(x)=\begin{cases}\sqrt{4-x^2} & \text{เมื่อ } |x|<2\\ x+2 & \text{เมื่อ } x\leq -2\\ x-2 & \text{เมื่อ } x\geq 2\end{cases}$

จงพิจารณาว่า f ต่อเนื่องบน $[-2,2]$ หรือไม่เพราะเหตุใด

<u>**วิธีทำ**</u> เราแบ่งการพิจารณาได้ดังนี้

พิจารณาความต่อเนื่องทางขวาที่จุด $x=-2$

จะได้ว่า 1. $f(-2)=2+(-2)=0$

2. $\lim\limits_{x\to -2^+} f(x)=\lim\limits_{x\to -2^+}\sqrt{4-x^2}=0$

3. $\lim\limits_{x\to -2^+} f(x)=0=f(-2)$

ดังนั้น f ต่อเนื่องทางขวาที่จุด $x=-2$

พิจารณาความต่อเนื่องบน $(-2,2)$ สำหรับ $a\in(-2,2)$ จะได้ว่า

1. $f(a)=\sqrt{4-a^2}$ ซึ่งเป็นจำนวนจริง เพราะว่า $a^2<4$

2. $\lim\limits_{x\to a} f(x)=\lim\limits_{x\to a}\sqrt{4-x^2}=\sqrt{4-a^2}$

3. $\lim\limits_{x\to a} f(x)=\sqrt{4-a^2}=f(a)$

ดังนั้น f ต่อเนื่องที่จุด $x=a$

นั่นคือ f ต่อเนื่องบน $(-2,2)$

พิจารณาความต่อเนื่องทางซ้ายที่จุด $x=2$

จะได้ว่า 1. $f(2)=2-2=0$

2. $\lim\limits_{x\to 2^-} f(x)=\lim\limits_{x\to 2^-}\sqrt{4-x^2}=\sqrt{4-2^2}=0$

3. $\lim\limits_{x\to 2^-} f(x)=0=f(2)$

ดังนั้น f ต่อเนื่องทางซ้ายที่จุด $x=2$

สรุปได้ว่า f ต่อเนื่องบน $[-2,2]$ □

ตัวอย่าง 1.5.8. กำหนดให้ $f(x) = \begin{cases} kx^2 & \text{เมื่อ } x \leq 2 \\ 2x+k & \text{เมื่อ } x > 2 \end{cases}$
จงหาค่าของ k ที่ทำให้ f ต่อเนื่องบน $\mathbb{R}$

<u>**วิธีทำ**</u> เนื่องจาก f ต่อเนื่องบน $\mathbb{R}$ ดังนั้น f ต่อเนื่องที่จุด $x = 2$ จะได้ว่า $\lim\limits_{x\to 2} f(x)$ มีค่า นั่นคือ $\lim\limits_{x\to 2^+} f(x) = \lim\limits_{x\to 2^-} f(x)$

ดังนั้น $4+k = 4k$ จะไดว่า $k = \frac{4}{3}$ □

ทฤษฎีบท 1.5.9. ถ้า f และ g เป็นฟังก์ชันต่อเนื่องที่จุด $x = a$ แล้วจะได้ว่า

1. $f+g$ เป็นฟังก์ชันที่ต่อเนื่องที่จุด $x = a$
2. cf เป็นฟังก์ชันที่ต่อเนื่องที่จุด $x = a$ เมื่อ c เป็นค่าคงตัว
3. fg เป็นฟังก์ชันที่ต่อเนื่องที่จุด $x = a$
4. $\dfrac{f}{g}$ เป็นฟังก์ชันที่ต่อเนื่องที่จุด $x = a$ เมื่อ $g(a) \neq 0$

ทฤษฎีบท 1.5.10. ถ้า f เป็นฟังก์ชันต่อเนื่องที่จุด a และ g เป็นฟังก์ชันต่อเนื่องที่จุด $f(a)$ แล้วจะได้ว่า $g \circ f$ เป็นฟังก์ชันต่อเนื่องที่จุด a

ทฤษฎีบท 1.5.11. ให้ $p(x) = a_nx^n + a_{n-1}x^{n-1} + \ldots + a_1x + a_0$ เป็นฟังก์ชันพหุนามดีกรี n เมื่อ $a_0, a_1 \ldots, a_n \in \mathbb{R}$ จะได้ว่า $p(x)$ เป็นฟังก์ชันต่อเนื่องบน $\mathbb{R}$

ทฤษฎีบท 1.5.12. ให้ $f(x) = \dfrac{p(x)}{q(x)}$ เป็นฟังก์ชันตรรกยะ โดยที่ $p(x)$ และ $q(x)$ เป็นฟังก์ชันพหุนาม จะได้ว่า $f(x)$ เป็นฟังก์ชันต่อเนื่องบนโดเมนของ f

ทฤษฎีบท 1.5.13. ให้ $f(x) = \sqrt[n]{x}$ เมื่อ n เป็นจำนวนเต็มบวก เป็นฟังก์ชันต่อเนื่องบน $\mathbb{R}$ และ $f(x) = \sqrt[n]{x}$ เมื่อ n เป็นจำนวนคู่บวก เป็นฟังก์ชันต่อเนื่องบน $[0,+\infty)$

ตัวอย่าง 1.5.14. จงพิจารณาว่าฟังก์ชัน $p(x) = (\sqrt{(4x^2+3)^2+5}\ -3)^4$ ต่อเนื่องบน $\mathbb{R}$ หรือไม่เพราะเหตุใด

<u>วิธีทำ</u> ให้ $f(x) = (4x^2+3)^2+5$

$g(x) = \sqrt{x}$

และ $h(x) = (x-3)^4$

โดยทฤษฎีบท 1.5.11 จะได้ว่า f ต่อเนื่องบน $\mathbb{R}$
และเนื่องจาก $f(x) > 0$ สำหรับทุก $x \in \mathbb{R}$
ดังนั้น $(\sqrt{(4x^2+3)^2+5}\ -3) = g(f(x))$ ต่อเนื่องบน $\mathbb{R}$
เนื่องจาก h ต่อเนื่องบน $\mathbb{R}$ (โดยทฤษฎีบท 1.5.11) ดังนั้น
$h\circ(g\circ f(x)) = (\sqrt{(4x^2+3)^2+5}\ -3)^4$ เป็นฟังก์ชันต่อเนื่องบน $\mathbb{R}$ (โดยทฤษฎีบท 1.5.10) ดังนั้น $(\sqrt{(4x^2+3)^2+5}\ -3)^4$ เป็นฟังก์ชันต่อเนื่องบน $\mathbb{R}$ $\square$

ตัวอย่าง 1.5.15. จงหาเซตที่ใหญ่ที่สุดที่ทำให้ฟังก์ชัน $f(x) = \dfrac{3+\sqrt{x^2-4}}{x^2+3x-4}$ ต่อเนื่อง

<u>วิธีทำ</u> ให้ $g(x) = x^2-4$

$h(x) = \sqrt{x}$

$k(x) = 3+x$

และ $l(x) = x^2+3x-4 = (x+4)(x-1)$

โดยทฤษฎีบท 1.5.11 จะได้ว่า g, k และ l มีความต่อเนื่องบน $\mathbb{R}$ และโดยทฤษฎีบท 1.5.13 จะได้ว่า h ต่อเนื่องบน $[0, +\infty)$

ดังนั้นโดยทฤษฎีบท 1.5.10 จะได้ว่า $h\circ g(x) = \sqrt{x^2-4}$ ต่อเนื่องบน $(-\infty, -2]\cup[2, +\infty)$

เนื่องจาก k ต่อเนื่องบน $\mathbb{R}$
ดังนั้น $(k\circ(h\circ g))(x) = 3+\sqrt{x^2-4}$ ต่อเนื่องบน $x \in (-\infty, -1]\cup[1, +\infty)$
และโดยทฤษฎีบท 1.5.12 จะได้ว่า
$f(x) = \dfrac{3+\sqrt{x^2-4}}{x^2+3x-4} = \dfrac{(k\circ(h\circ g))(x)}{l(x)}$ ต่อเนื่องบน $(-\infty, -2]\cup[2, +\infty)$ โดยที่ $l(x) \neq 0$ ($x \neq -4$ หรือ $x \neq 1$)
ดังนั้น f มีความต่อเนื่องบน $(-\infty, -4])\cup(-4, -2]\cup[2, +\infty)$ $\square$

แบบฝึกหัด 1.5

จงตรวจสอบว่าฟังก์ชันต่อเนื่องบนแต่ละช่วงที่กำหนดให้หรือไม่

1. $f(x) = \dfrac{2}{x+5}, (3,7), [-6,4], (-\infty,0), (-5,+\infty), [-5,+\infty), [-10,-5)$
2. $f(x) = \dfrac{x}{x^2-1}, (0,1), (-1,1), [0,1], (-1,0], (-\infty,-1], (1,+\infty)$
3. $f(x) = \sqrt{x^2-9}, (-\infty,-3), (-\infty,-3], (3,+\infty), [3,+\infty), (-3,3)$
4. $f(x) = \dfrac{|x-1|}{x-1}, (-\infty,1), (-\infty,1], [-1,1], [-1,+\infty), (1,+\infty)$

จงหาเซตของจำนวนจริงที่ทำให้ฟังก์ชันที่กำหนดให้ต่อไปนี้มีความต่อเนื่องบนเซตนั้น

5. $f(x) = \dfrac{3x}{2x^2-x-3}$
6. $g(x) = \sqrt{2x-3} + x^2$
7. $f(x) = \dfrac{x-1}{\sqrt{x^2-1}}$
8. $h(x) = \dfrac{\sqrt{x^2-9}\sqrt{25-x^2}}{x-4}$

จงหาค่า k และ c ที่ทำให้ฟังก์ชันต่อเนื่องทุกจุดใน $\mathbb{R}$

9. $f(x) = \begin{cases} 3x+7 & \text{เมื่อ } x \le 4 \\ kx-1 & \text{เมื่อ } x > 4 \end{cases}$
10. $f(x) = \begin{cases} 4x & \text{เมื่อ } x \le -1 \\ cx+k & \text{เมื่อ } -1 < x \le 2 \\ -5x & \text{เมื่อ } x > 2 \end{cases}$
11. $f(x) = \begin{cases} x+2c & \text{เมื่อ } x < -2 \\ 3cx+k & \text{เมื่อ } -2 \le x \le 1 \\ 3x-2k & \text{เมื่อ } x > 1 \end{cases}$
12. $f(x) = \begin{cases} cx-1 & \text{เมื่อ } x \le -3 \\ \frac{9-x^2}{4-\sqrt{x^2+7}} & \text{เมื่อ } |x| < 3 \\ kx^2-1 & \text{เมื่อ } x \ge 3 \end{cases}$

เฉลยแบบฝึกหัด 1.5

1. ต่อเนื่อง, ไม่ต่อเนื่อง, ไม่ต่อเนื่อง, ต่อเนื่อง ไม่ต่อเนื่อง, ต่อเนื่อง
2. ต่อเนื่อง, ต่อเนื่อง, ไม่ต่อเนื่อง, ต่อเนื่อง, ไม่ต่อเนื่อง, ต่อเนื่อง
3. ต่อเนื่อง, ต่อเนื่อง, ต่อเนื่อง, ต่อเนื่อง, ไม่ต่อเนื่อง
4. ต่อเนื่อง, ไม่ต่อเนื่อง, ไม่ต่อเนื่อง, ไม่ต่อเนื่อง, ต่อเนื่อง
5. $\mathbb{R} - \{\frac{3}{2}, -1\}$
6. $[\frac{3}{2}, +\infty)$
7. $(-\infty, -1) \cup (1, +\infty)$
8. $[-5, -3] \cup [3, 4) \cup (4, 5]$
9. $k = 5$
10. $k = -6$ และ $c = -2$
11. $k = \frac{2}{3}$ และ $c = \frac{1}{3}$
12. $k = 1$ และ $c = 3$

1.6 ลิมิตของฟังก์ชันตรีโกณมิติ

ทฤษฎีบท 1.6.1. $\lim\limits_{\theta \to 0} \sin\theta = 0$ และ $\lim\limits_{\theta \to 0} \cos\theta = 1$

ทฤษฎีบท 1.6.2. $\lim\limits_{\theta \to 0} \dfrac{\sin\theta}{\theta} = 1$

ตัวอย่าง 1.6.3. จงหาค่าของลิมิตต่อไปนี้ ถ้าลิมิตมีค่า

1. $\lim\limits_{\theta \to 0} \dfrac{1 - \cos\theta}{\theta}$
2. $\lim\limits_{\theta \to 0} \dfrac{\tan 3\theta}{\theta}$

3. $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{x \sin x}{1 - \cos x}$

วิธีทำ 1. $\lim\limits_{\theta \to 0} \dfrac{1 - \cos\theta}{\theta} = \lim\limits_{\theta \to 0} \Big(\dfrac{1 - \cos\theta}{\theta} \cdot \dfrac{1 + \cos\theta}{1 + \cos\theta}\Big)$

$$= \lim_{\theta \to 0} \frac{1 - \cos^2\theta}{\theta(1 + \cos\theta)}$$

$$= \lim_{\theta \to 0} \frac{\sin^2\theta}{\theta(1 + \cos\theta)}$$

$$= \lim_{\theta \to 0} \Big(\frac{\sin\theta}{\theta} \cdot \frac{\sin\theta}{1 + \cos\theta}\Big)$$

$$= 1 \cdot \frac{0}{1+1} \quad = \quad 0$$

2. $\lim\limits_{\theta \to 0} \dfrac{\tan 3\theta}{\theta} = \lim\limits_{\theta \to 0} \dfrac{3 \tan 3\theta}{3\theta}$

$$= \lim_{\theta \to 0} (3 \cdot \frac{\tan 3\theta}{3\theta})$$

$$= \lim_{t \to 0} (3 \cdot \frac{\tan t}{t}) \quad (\text{ให้ } t = 3\theta)$$

$$= \lim_{t \to 0} (3 \cdot \frac{\sin t}{t} \cdot \frac{1}{\cos t})$$

$$= 3(1)(\frac{1}{1}) \quad = \quad 3$$

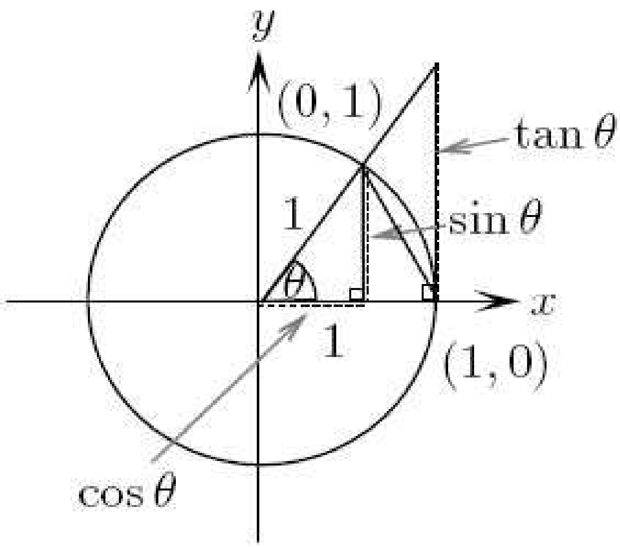
3. $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{x \sin x}{1 - \cos x} = \lim\limits_{x \to 0} (\dfrac{x \sin x}{1 - \cos x} \cdot \dfrac{1 + \cos x}{1 + \cos x})$

$$= \lim_{x \to 0} \frac{x(\sin x)(1 + \cos x)}{\sin^2 x}$$

$$= \lim_{x \to 0} \frac{1 + \cos x}{\dfrac{\sin x}{x}}$$

$$= \frac{1+1}{1} \quad = \quad 2$$

□



รูปที่ 1.21: วงกลมหนึ่งหน่วยเทียบกับค่าของฟังก์ชันตรีโกณมิติ

แบบฝึกหัด 1.6

จงหาค่าลิมิตต่อไปนี้

1. $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\sin 9x}{\sin 7x}$
2. $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{3x}{\sin 5x}$
3. $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{1-\cos 4x}{x}$
4. $\lim\limits_{x\to 0^+} \dfrac{\sin x}{x^2}$
5. $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{1-\cos 2x}{\sin 3x}$
6. $\lim\limits_{x\to \pi^+} \dfrac{\sin x}{x-\pi}$
7. $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\tan 7x}{\sin 3x}$
8. $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{x^2}{1-\cos x}$
9. $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{1-\cos 5x}{\cos 7x-1}$
10. $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{3x-\sin 2x}{x}$

เฉลยแบบฝึกหัด 1.6

1. $\frac{9}{7}$	2. $\frac{3}{5}$	3. 0	4. $+\infty$	5. 0
6. -1	7. $\frac{7}{3}$	8. 1	9. $-\frac{25}{49}$	10. 1

บทที่ 2

เทคนิคการแก้โจทย์ปัญหา

2.1 ทบทวนทฤษฎีบทที่สำคัญ

สรุปสูตรและทฤษฎีบทของลิมิต

1. $\lim_{x\to a} k = k$ เมื่อ k เป็นค่าคงที่

2. $\lim_{x\to a} x = a$

3. $\lim_{x\to a}[kf(x)] = k\lim_{x\to a} f(x)$

4. $\lim_{x\to a}[f(x) \pm g(x)] = \lim_{x\to a} f(x) \pm \lim_{x\to a} g(x)$

5. $\lim_{x\to a}[f(x)\cdot g(x)] = [\lim_{x\to a} f(x)][\lim_{x\to a} g(x)]$

6. $\lim_{x\to a} \dfrac{f(x)}{g(x)} = \dfrac{\lim_{x\to a} f(x)}{\lim_{x\to a} g(x)}$ เมื่อ $\lim_{x\to a} g(x) \neq 0$

7. $\lim_{x\to a}[f(x)]^n = [\lim_{x\to a} f(x)]^n$

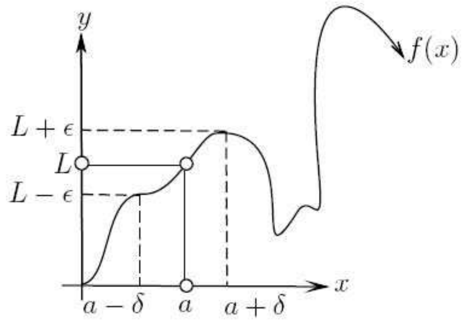
8. $\lim_{x\to a} \sqrt[n]{f(x)} = \sqrt[n]{\lim_{x\to a} f(x)}$

9. $\lim_{x\to a} |f(x)| = |\lim_{x\to a} f(x)|$

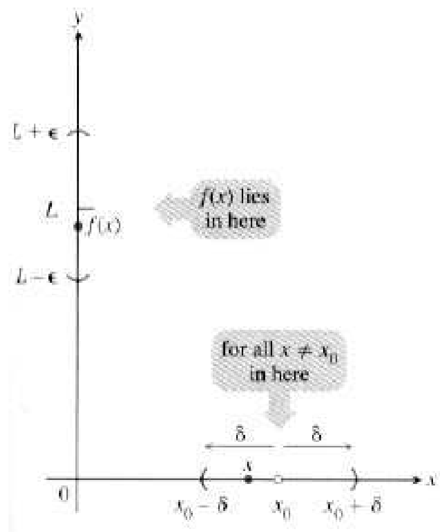
หมายเหตุ สูตร 1.–9. ยังคงเป็นจริงสำหรับการแทนค่า $x \to a$ ด้วย $x \to a^+$ หรือ $x \to a^-$

$$\boxed{\lim_{x\to a} f(x) = L \text{ ก็ต่อเมื่อ } \lim_{x\to a^+} f(x) = L \text{ และ } \lim_{x\to a^-} f(x) = L}$$

นั่นคือ $\lim\limits_{x\to a} f(x)$ จะมีค่า ก็ต่อเมื่อ ลิมิตทางซ้ายและลิมิตทางขวามีค่าเท่ากัน



รูปที่ 2.1: ลิมิตของฟังก์ชัน(1)



รูปที่ 2.2: ลิมิตของฟังก์ชัน(2)

ทฤษฎีบท 1. ให้ f และ g เป็นฟังก์ชัน ถ้า $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = L$ เมื่อ $L \neq 0$ และ $\lim\limits_{x\to+\infty} g(x) = 0$ แล้วจะได้ว่า

1. ถ้ามีจำนวนจริงบวก n ที่ทำให้ $g(x) > 0$ ทุก x ซึ่ง $x > n$ แล้วจะได้ว่า

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{f(x)}{g(x)} = \begin{cases} -\infty & \text{เมื่อ} \quad L < 0 \\ +\infty & \text{เมื่อ} \quad L > 0 \end{cases}$$

2. ถ้ามีจำนวนจริงบวก n ที่ทำให้ $g(x) < 0$ ทุก x ซึ่ง $x > n$ แล้วจะได้ว่า

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{f(x)}{g(x)} = \begin{cases} +\infty & \text{เมื่อ} \quad L < 0 \\ -\infty & \text{เมื่อ} \quad L > 0 \end{cases}$$

ทฤษฎีบท 2. ให้ f และ g เป็นฟังก์ชัน ถ้า $\lim_{x\to-\infty} f(x) = L$ เมื่อ $L \neq 0$ และ $\lim_{x\to-\infty} g(x) = 0$ แล้วจะได้ว่า

1. ถ้ามีจำนวนจริงลบ n ที่ทำให้ $g(x) > 0$ ทุก x ซึ่ง $x < n$ แล้วจะได้ว่า

$$\lim_{x\to-\infty} \frac{f(x)}{g(x)} = \begin{cases} -\infty & \text{เมื่อ} \quad L < 0 \\ +\infty & \text{เมื่อ} \quad L > 0 \end{cases}$$

2. ถ้ามีจำนวนจริงลบ n ที่ทำให้ $g(x) < 0$ ทุก x ซึ่ง $x < n$ แล้วจะได้ว่า

$$\lim_{x\to-\infty} \frac{f(x)}{g(x)} = \begin{cases} +\infty & \text{เมื่อ} \quad L < 0 \\ -\infty & \text{เมื่อ} \quad L > 0 \end{cases}$$

ทฤษฎีบท 3. ให้ f และ g เป็นฟังก์ชัน ถ้า $\lim_{x\to a^+} f(x) = L$ เมื่อ $L \neq 0$ และ $\lim_{x\to a^+} g(x) = 0$ แล้วจะได้ว่า

1. ถ้ามีจำนวนจริงบวก δ ที่ทำให้ $g(x) > 0$ ทุก x ซึ่ง $a < x < a+\delta$ แล้วจะได้ว่า

$$\lim_{x\to a^+} \frac{f(x)}{g(x)} = \begin{cases} -\infty & \text{เมื่อ} \quad L < 0 \\ +\infty & \text{เมื่อ} \quad L > 0 \end{cases}$$

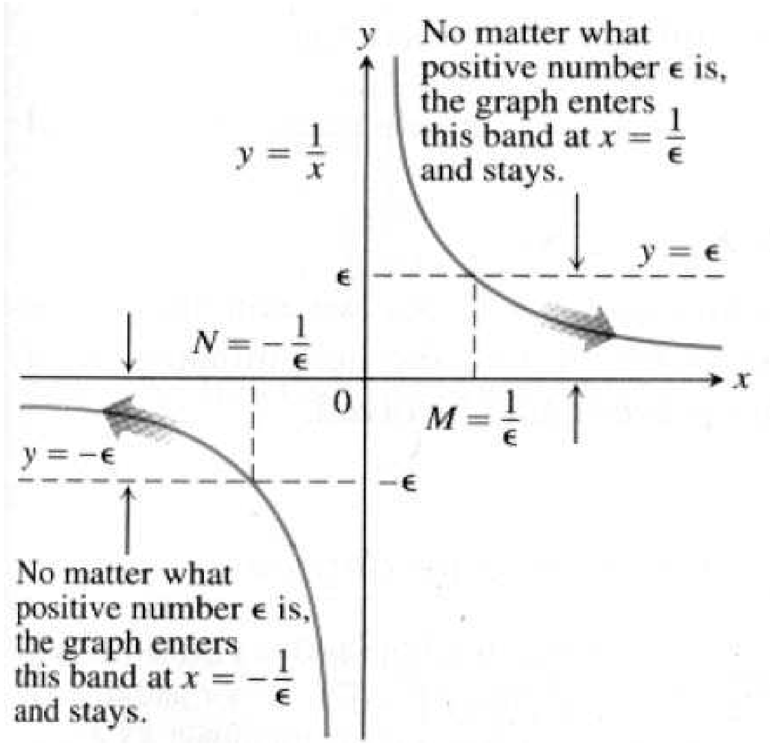
2. ถ้ามีจำนวนจริงบวก δ ที่ทำให้ $g(x) < 0$ ทุก x ซึ่ง $a < x < a+\delta$ แล้วจะได้ว่า

$$\lim_{x\to a^+} \frac{f(x)}{g(x)} = \begin{cases} +\infty & \text{เมื่อ} \quad L < 0 \\ -\infty & \text{เมื่อ} \quad L > 0 \end{cases}$$

ทฤษฎีบท 4. ให้ f และ g เป็นฟังก์ชัน ถ้า $\lim_{x\to a^-} f(x) = L$ เมื่อ $L \neq 0$ และ $\lim_{x\to a^-} g(x) = 0$ แล้วจะได้ว่า

1. ถ้ามีจำนวนจริงบวก δ ที่ทำให้ $g(x) > 0$ ทุก x ซึ่ง $a < x < a+\delta$ แล้วจะได้ว่า

$$\lim_{x\to a^-} \frac{f(x)}{g(x)} = \begin{cases} -\infty & \text{เมื่อ} \quad L < 0 \\ +\infty & \text{เมื่อ} \quad L > 0 \end{cases}$$



รูปที่ 2.3: ลิมิตทางซ้าย-ทางขวา

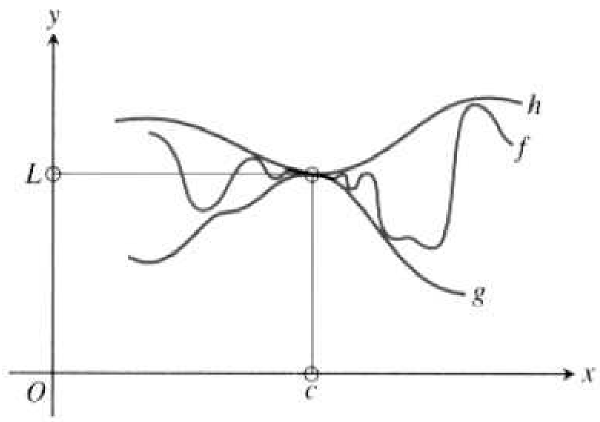
2. ถ้ามีจำนวนจริงบวก δ ที่ทำให้ $g(x) < 0$ ทุก x ซึ่ง $a < x < a + \delta$ แล้วจะได้ว่า

$$\lim_{x \to a^-} \frac{f(x)}{g(x)} = \begin{cases} +\infty & \text{เมื่อ} \quad L < 0 \\ -\infty & \text{เมื่อ} \quad L > 0 \end{cases} \quad \text{(ดังรูปที่ 2.3)}$$

ทฤษฎีบท 5. ให้ f และ g เป็นฟังก์ชัน ถ้า $\lim_{x \to a} f(x) = L$ เมื่อ $L \neq 0$ และ $\lim_{x \to a} g(x) = 0$ แล้วจะได้ว่า

1. ถ้ามีจำนวนจริงบวก δ ที่ทำให้ $g(x) > 0$ ทุก x ซึ่ง $a - \delta < x < a + \delta$ แล้วจะได้ว่า

$$\lim_{x \to a} \frac{f(x)}{g(x)} = \begin{cases} -\infty & \text{เมื่อ} \quad L < 0 \\ +\infty & \text{เมื่อ} \quad L > 0 \end{cases}$$



รูปที่ 2.4: *Sandwich Theorem*

2. ถ้ามีจำนวนจริงบวก δ ที่ทำให้ $g(x) < 0$ ทุก x ซึ่ง $a - \delta < x < a + \delta$ แล้วจะได้ว่า

$$\lim_{x \to a} \frac{f(x)}{g(x)} = \begin{cases} +\infty & \text{เมื่อ} \quad L < 0 \\ -\infty & \text{เมื่อ} \quad L > 0 \end{cases}$$

ทฤษฎีบท 6. **(***Sandwich Theorem* **หรือ** *Squeeze Theorem***)** ให้ f, g และ h เป็นฟังก์ชัน ถ้า $f(x) \leq g(x) \leq h(x)$ สำหรับทุกๆจำนวนจริง x ที่อยู่ในช่วงเปิดใดๆที่มี a เป็นสมาชิก โดยที่ $x \neq a$ ถ้า $\lim_{x \to a} f(x) = L = \lim_{x \to a} h(x) = L$ จะได้ว่า $\lim_{x \to a} g(x) = L$ (ดังรูปที่ 2.5)

ฟังก์ชัน $y = f(x)$ มีความต่อเนื่องที่จุด $x = a$ ก็ต่อเมื่อ $\lim_{x \to a} f(x) = f(a)$

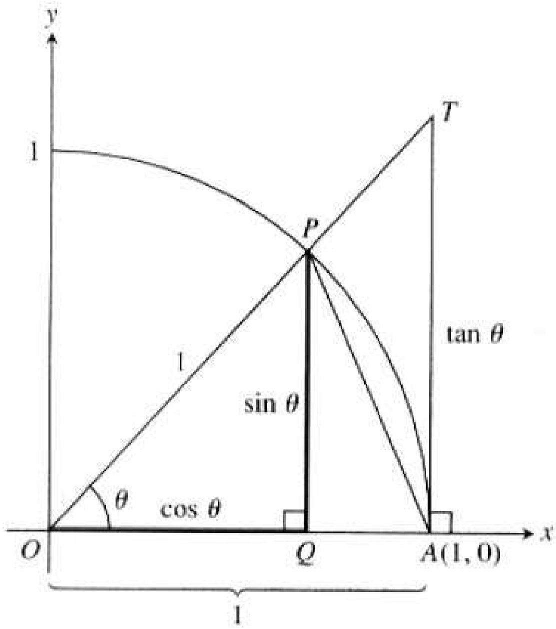
ดังนั้น ถ้าเราต้องการตรวจสอบว่า $y = f(x)$ มีความต่อเนื่องของ ที่จุด $x = a$ ก็ต่อเมื่อ

1. $f(a)$ มีค่า

2. $\lim_{x \to a} f(x)$ มีค่า

3. $\lim_{x \to a} f(x) = f(a)$

ทฤษฎีบท 7. สำหรับ θ ใดๆในระบบเรเดียน จะได้ว่า $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin x}{x} = 1$ (ดังรูปที่ 2.5)



รูปที่ 2.5: ค่า $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin x}{x}$

$$\boxed{\lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{x} = 1}$$

$$\boxed{\lim_{x\to 0}\frac{1-\cos x}{x} = 0}$$

ⓒⓒⓒⓒⓒⓒⓒⓒⓒⓒⓒⓒⓒⓒⓒⓒⓒⓒⓒⓒⓒⓒⓒⓒⓒⓒⓒⓒⓒⓒⓒⓒⓒⓒⓒⓒⓒⓒ

2.2 วิธีแก้โจทย์ปัญหาเรื่อง ลิมิตและความต่อเนื่อง

2.2.1 เทคนิคการแก้โจทย์ปัญหาทั่วไป

เทคนิคการแทนค่า

2.2.2 เทคนิคการแก้โจทย์ปัญหาเมื่อ $\lim\limits_{x \to a} \dfrac{f(x)}{g(x)} = \dfrac{0}{0}$

เทคนิคการทำให้อยู่ในรูปอย่างง่าย

เทคนิคการการใช้สังยุค

เทคนิคการแยกตัวประกอบ

เทคนิคการใช้สูตร

2.2.3 เทคนิคการแก้โจทย์ลิมิตค่าอนันต์

2.2.4 เทคนิคการแก้โจทย์ลิมิตค่าสัมบูรณ์

2.2.5 เทคนิคการแก้โจทย์ลิมิตของความต่อเนื่อง

เทคนิคการพิจารณากราฟความต่อเนื่อง

เทคนิคการแก้โจทย์ลิมิตของความต่อเนื่อง 2 กรณี

เทคนิคการแก้โจทย์ลิมิตของความต่อเนื่อง 3 กรณี

เทคนิคการแก้โจทย์ลิมิตของความต่อเนื่องหลายกรณี

บทที่ 3

แบบฝึกหัด

3.1 แบบฝึกหัดที่ 1. การแทนค่า(Substitution)

คำสั่ง; ลิมิตของฟังก์ชันทุกข้อต่อไปนี้สามารถหาค่าได้จงคำนวณหาค่าลิมิตดังกล่าว

1. $\lim_{x\to -1}(3x-7)$
2. $\lim_{x\to -2}(x^2+2x+4)$
3. $\lim_{x\to 2}\dfrac{2x-7}{3-4x}$
4. $\lim_{x\to 2}(x^3-2x^2+5)$
5. $\lim_{x\to 2}\dfrac{\sqrt{x^2+8}}{x+8}$
6. $\lim_{x\to 3}\sqrt[3]{2x^2+5}$
7. $\lim_{x\to -3}\sqrt{x^2-5x+4}$
8. $\lim_{x\to 1/2}\sqrt{\dfrac{3x^2+4x-2}{3x^3+6}}$
9. $\lim_{x\to -1}(2x^3-4x^2+5x+3)$
10. $\lim_{x\to -2}(3x^2-5x+5)^{2/3}$
11. $\lim_{x\to 3}(2x+1)(1-5x)$
12. $\lim_{x\to 2}(1+2x-3x^2)^3$
13. $\lim_{x\to -3}\sqrt{9+x^2}$
14. $\lim_{x\to 1}\dfrac{(2x+1)^5}{(5x-2)^4}$
15. $\lim_{x\to 4}\dfrac{(3x-8)^4}{(4x-15)^3}$
16. $\lim_{x\to -3}\dfrac{3x}{(x-4)^2}$

3.2 แบบฝึกหัดที่ 2. การทำให้อยู่ในรูปอย่างง่ายและการใช้สังยุค

คำสั่ง; ลิมิตของฟังก์ชันทุกข้อต่อไปนี้สามารถหาค่าได้จงคำนวณหาค่าลิมิตดังกล่าว

1. $\lim\limits_{x\to 0} \frac{1}{x}\left(\frac{1}{3+x} - \frac{1}{3}\right)$
2. $\lim\limits_{h\to 0} \left(\frac{1}{a+h} - \frac{1}{a}\right)\left(\frac{1}{h} - \frac{1}{a}\right)$
3. $\lim\limits_{x\to 3} \left(\frac{1}{3-x}\right)\left(\frac{x}{3} - \frac{3}{x}\right)$
4. $\lim\limits_{x\to 3} \frac{x-3}{\sqrt{x+1}-2}$
5. $\lim\limits_{x\to 25} \frac{4-\sqrt{x-9}}{\sqrt{x^2-576}-7}$
6. $\lim\limits_{x\to 1} \frac{\sqrt{x^2+3}-2}{x^2+3x-4}$
7. $\lim\limits_{h\to 0} \frac{1-h^{-2}}{1+h^{-2}}$
8. $\lim\limits_{x\to 0} \frac{x+x^{-1}}{x-x^{-1}}$
9. $\lim\limits_{x\to -2} \left(1+\frac{2}{x}\right)\left(\frac{5}{4-x^2}\right)$
10. $\lim\limits_{x\to 7} \frac{x-7}{\sqrt{x+2}-3}$
11. $\lim\limits_{x\to 0} \left(\sqrt{\frac{x^2+1}{x^2}} - \sqrt{\frac{1}{x^2}}\right)$
12. $\lim\limits_{x\to -4} \frac{\sqrt[3]{x+5}-1}{x+4}$
13. $\lim\limits_{x\to 0} \frac{\sqrt[3]{x+1}-1}{x}$
14. $\lim\limits_{x\to 9} \frac{x^2-81}{x+\sqrt{x}-12}$
15. $\lim\limits_{x\to 0} \frac{\sqrt[3]{x+3}+\sqrt{x+2}-\sqrt[3]{3}-\sqrt{2}}{x}$
16. $\lim\limits_{x\to 2} \frac{3-\sqrt{x^2+5}}{x^2-4}$
17. $\lim\limits_{x\to 2} \frac{x-2}{3-\sqrt{x^2+5}}$
18. $\lim\limits_{x\to 5} \frac{\sqrt{2x-1}-3}{x-5}$
19. $\lim\limits_{x\to 4} \left(\frac{1/\sqrt{x}-1/2}{x-4}\right)$
20. $\lim\limits_{x\to 0} \frac{\sqrt[4]{x^4+1}-\sqrt{x^2+1}}{x^2}$
21. $\lim\limits_{x\to -2} \frac{8x^{-3}+2x^{-2}+x^{-1}+1}{x+2}$
22. $\lim\limits_{x\to 0} \frac{\sqrt{7+\sqrt{4-2x}}-3}{x}$

23. $\lim\limits_{x\to 0} x\left(1-\dfrac{1}{x}\right)$

24. $\lim\limits_{x\to 1} \dfrac{\sqrt{x+3}-2}{x-1}$

25. $\lim\limits_{x\to 8} \dfrac{\sqrt{2+\sqrt[3]{x}}-2}{x-8}$

26. $\lim\limits_{x\to 0} \left(\dfrac{\sqrt{3+\sqrt{4-x}}-\sqrt{5}}{x}\right)$

27. $\lim\limits_{x\to -4} \dfrac{\sqrt[3]{x+5}-1}{x+4}$

28. $\lim\limits_{x\to 5} \dfrac{\sqrt{x^2-7x+16}-\sqrt{6}}{(x-5)(x+1)}$

29. $\lim\limits_{x\to -3} \dfrac{x^2-9}{\sqrt{12-\sqrt{x^2}}-3}$

30. $\lim\limits_{x\to 8} \dfrac{\sqrt{7+\sqrt[3]{x}}-3}{x-8}$

3.3 แบบฝึกหัดที่ 3. การแยกตัวประกอบ(Factorization)

คำสั่ง; ลิมิตของฟังก์ชันทุกข้อต่อไปนี้สามารถหาค่าได้จงคำนวณหาค่าลิมิตดังกล่าว

1. $\lim_{x\to -2} \dfrac{(x^2-x-6)^4}{(x+2)^2}$
2. $\lim_{x\to 1/2} \sqrt[3]{\dfrac{4x^2+4x-3}{4x^2-1}}$
3. $\lim_{x\to -2} \dfrac{3x^2+5x-2}{2x^2+7x+6}$
4. $\lim_{x\to 3} \dfrac{x^2+x-12}{3x-9}$
5. $\lim_{x\to \frac{1}{3}} \dfrac{6x^3-11x^2+6x-1}{6x^2-11x+3}$
6. $\lim_{t\to 2} \dfrac{4t^2-3t+2}{t^3+2t-6}$
7. $\lim_{h\to 0} \dfrac{x^2h+3xh+h^3}{2xh+5h^2}$
8. $\lim_{x\to 3} \dfrac{2x^3-5x^2-2x-3}{4x^3-13x^2+4x-3}$
9. $\lim_{t\to 1} \dfrac{t^3+t^2-5t+3}{t^3-3t+2}$
10. $\lim_{x\to -2} \dfrac{x^3-x^2-x+10}{x^2+3x+2}$
11. $\lim_{x\to -1} \dfrac{2x^2-x-3}{x^3+2x^2+6x+5}$
12. $\lim_{y\to 4} \dfrac{2y^3-11y^2+10y+8}{3y^3-17y^2+16y+16}$
13. $\lim_{x\to 7} \dfrac{x^2+6x-91}{x^2+12x-133}$
14. $\lim_{y\to -3} \sqrt{\dfrac{y^2-9}{2y^2+7y+3}}$
15. $\lim_{s\to 4} \dfrac{3s^2-8s-16}{2s^2-9s+4}$
16. $\lim_{x\to 2} \dfrac{x^3+x^2-7x+2}{8-2x-x^2}$
17. $\lim_{x\to 4} \dfrac{3x^2-17x+20}{4x^2-25x+36}$
18. $\lim_{x\to -1} \dfrac{2x^2-x-3}{x^3+2x^2-4x-5}$
19. $\lim_{t\to 2} \dfrac{t^3+3t^2-12t+4}{t^3-4t}$
20. $\lim_{x\to -3} \dfrac{x^4-6x^2-27}{x^3+3x^2+x+3}$
21. $\lim_{x\to 3} \dfrac{x^3+x-30}{x-3}$
22. $\lim_{x\to 1} \dfrac{x^3-1}{x^3-x^2+x-1}$
23. $\lim_{x\to -1} \dfrac{2x^2-x-3}{1+2x^{-1}+6x^{-2}+5x^{-3}}$
24. $\lim_{x\to -2} \dfrac{3x^2+5x-2}{2-x}$
25. $\lim_{x\to 3} \left(\dfrac{1/3-1/x}{x-3}\right)$
26. $\lim_{x\to 1} \dfrac{x^{10}-1}{x-1} + \lim_{x\to 0} \dfrac{(x+2)^2-4}{x}$

3.4 แบบฝึกหัดที่ 4. การใช้สูตร(Formulas)

คำสั่ง; ลิมิตของฟังก์ชันทุกข้อต่อไปนี้สามารถหาค่าได้จงคำนวณหาค่าลิมิตดังกล่าว

1. $\lim_{x\to 4} \dfrac{x-4}{\sqrt{x}-2}$
2. $\lim_{x\to 3} \dfrac{9-x^2}{x-3}$
3. $\lim_{x\to 1} \dfrac{x^2-1}{x^3-1}$
4. $\lim_{x\to 2} \dfrac{\sqrt[3]{x}-\sqrt[3]{2}}{x-2}$
5. $\lim_{x\to 2} \dfrac{x^2-4}{x^3-8}$
6. $\lim_{x\to 4} \dfrac{x-4}{\sqrt{x}-2}$
7. $\lim_{x\to -1} \dfrac{x^8-1}{x+1}$
8. $\lim_{t\to \frac{3}{2}} \sqrt{\dfrac{8t^3-27}{4t^2-9}}$
9. $\lim_{x\to 3} \dfrac{\sqrt[3]{x}-\sqrt[3]{3}}{x-3}$
10. $\lim_{x\to 1} \dfrac{x^7-1}{x^2-1}$
11. $\lim_{x\to 3} \dfrac{x^{\frac{2}{3}}-9^{\frac{1}{3}}}{x-3}$
12. $\lim_{x\to 2} \dfrac{x^8-256}{x^2-4}$
13. $\lim_{x\to 1} \dfrac{x^5-1}{x^2-1}$
14. $\lim_{x\to -3/2} \dfrac{4x^2-9}{2x+3}$
15. $\lim_{x\to 1/3} \dfrac{9x-3}{54x^3-2}$
16. $\lim_{x\to 7} \dfrac{(x-5)^3-8}{98-2x^2}$
17. $\lim_{s\to a} \dfrac{s^4-a^4}{a^2-s^2}$
18. $\lim_{x\to 4} \dfrac{|(x-4)^3|}{x-4}$
19. $\lim_{x\to -3} \dfrac{3x}{(x-4)^2}$
20. $\lim_{x\to 1} \dfrac{2x^3-5x^2}{x^2-1}$
21. $\lim_{t\to 2} \dfrac{t+2}{t^2-4}$
22. $\lim_{t\to 2} \dfrac{-t+2}{(t-2)^2}$
23. $\lim_{x\to 3} \dfrac{\sqrt{x^2-9}}{x-3}$
24. $\lim_{x\to 2} \dfrac{x^2-4}{|2x-4|}$

3.5 แบบฝึกหัดที่ 5. ลิมิตฟังก์ชันตรีโกณมิติ(เพิ่มเติม)

คำสั่ง; ลิมิตของฟังก์ชันทุกข้อต่อไปนี้สามารถหาค่าได้จงคำนวณหาค่าลิมิตดังกล่าว

สิ่งที่ควรรู้
1. $\lim_{\theta \to 0} \sin\theta = 0,$; เมื่อ θ เป็นหน่วยวัดมุมในระบบเรเดียน
2. $\lim_{\theta \to 0} \cos\theta = 1,$; เมื่อ θ เป็นหน่วยวัดมุมในระบบเรเดียน
3. $\lim_{\theta \to 0} \frac{\sin\theta}{\theta} = 1,$; เมื่อ θ เป็นหน่วยวัดมุมในระบบเรเดียน
4. $\lim_{\theta \to 0} \frac{1-\cos\theta}{\theta} = 0,$; เมื่อ θ เป็นหน่วยวัดมุมในระบบเรเดียน

1. $\lim_{x \to 0} \frac{\sin 4x}{x}$
2. $\lim_{x \to 0} \frac{2x}{\sin 3x}$
3. $\lim_{x \to 0} \frac{\sin 9x}{\sin 7x}$
4. $\lim_{x \to 0} \frac{\sin^3 x}{x^2}$
5. $\lim_{x \to 0} \frac{1-\cos x}{1+\sin x}$
6. $\lim_{z \to 0} \frac{1-\cos 2z}{4z}$
7. $\lim_{x \to 0} \frac{3x^2}{1-\cos^2 \frac{1}{2}x}$
8. $\lim_{x \to 0} \frac{\tan x}{2x}$
9. $\lim_{x \to 0} \frac{1-\cos x}{x^2}$
10. $\lim_{x \to 0} \frac{1-\cos 2x}{\sin 3x}$
11. $\lim_{y \to 0^+} \frac{\sin 4y}{\cos 3y - 1}$
12. $\lim_{x \to \pi^+} \frac{\tan x}{x-\pi}$
13. $\lim_{x \to 0} \frac{\sec x - 1}{x \sec x}$
14. $\lim_{x \to 0} \frac{x \sin x}{1-\cos x}$
15. $\lim_{x \to \frac{\pi}{2}} \frac{1+\cos x}{\tan 2x}$
16. $\lim_{x \to \frac{\pi}{4}} \frac{\tan(\pi - 4x)}{x - \frac{\pi}{4}}$
17. $\lim_{x \to 0} \frac{\csc 3x}{\cot x}$
18. $\lim_{x \to 0} \frac{1-\cos 2x}{\sin 3x}$
19. $\lim_{h \to 0} \frac{1-\cos 3h}{\cos 4h - 1}$
20. $\lim_{x \to \infty} \sin\left(\frac{\pi x}{2-3x}\right)$
21. $\lim_{h \to 0} \frac{1-\cos 5h}{\cos 7h - 1}$
22. $\lim_{x \to 5} \frac{\sin(x-5)}{x^2-25}$

23. $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{x^2+3x}{\sin x}$

24. $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\sin x}{3x^2+2x}$

25. $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{x^2}{\sec x - 1}$

26. $\lim\limits_{x\to 2} \dfrac{\sin(2x-4)}{x^2-4}$

27. $\lim\limits_{x\to -2} \dfrac{\sin(x^2+3x+2)}{x+2}$

28. $\lim\limits_{x\to -1} \dfrac{\sin(x^2+3x+2)}{x^3+1}$

29. $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{(\sin x - 1)\tan x}{2\cos x}$

30. $\lim\limits_{x\to \frac{\pi}{2}} \dfrac{1-\sin x}{2\cos^2 x}$

31. $\lim\limits_{x\to \pi/2} \dfrac{\frac{1}{2}\pi - x}{\cos x}$

32. $\lim\limits_{x\to \pi^+} \dfrac{\sin x}{x-\pi}$

33. $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{x^2}{1-\cos x}$

34. $\lim\limits_{x\to \pi/2} \dfrac{1-\sin x}{\frac{1}{2}\pi - x}$

35. $\lim\limits_{x\to \infty} x\sin\left(\dfrac{1}{x}\right)$

36. $\lim\limits_{x\to -\infty} x\left(1-\cos\left(\dfrac{1}{x}\right)\right)$

3.6 แบบฝึกหัดที่ 6. ลิมิตทางซ้ายและลิมิตทางขวา

คำสั่ง; จงเขียนกราฟและหาค่าลิมิตที่กำหนดให้ต่อไปนี้ (ถ้ามี) และให้เหตุผล (ถ้าไม่มีลิมิต)

1. $f(x) = \begin{cases} 2 & \text{เมื่อ } x > 1 \\ -1 & \text{เมื่อ } x \leq 1 \end{cases}$

   1) $\lim\limits_{x\to1^+} f(x)$ 2) $\lim\limits_{x\to1^-} f(x)$ 3) $\lim\limits_{x\to1} f(x)$

2. $f(x) = \begin{cases} -2 & \text{เมื่อ } x < 0 \\ 2 & \text{เมื่อ } x \geq 0 \end{cases}$

   1) $\lim\limits_{x\to0^+} f(x)$ 2) $\lim\limits_{x\to0^-} f(x)$ 3) $\lim\limits_{x\to0} f(x)$

3. $f(t) = \begin{cases} t+4 & \text{เมื่อ } t \leq -4 \\ 4-t & \text{เมื่อ } -4 < t \end{cases}$

   1) $\lim\limits_{t\to-4^+} f(t)$ 2) $\lim\limits_{t\to-4^-} f(t)$ 3) $\lim\limits_{t\to-4} f(t)$

4. $g(s) = \begin{cases} s+3 & \text{เมื่อ } s \leq -2 \\ 3-s & \text{เมื่อ } -2 < s \end{cases}$

   1) $\lim\limits_{s\to-2^+} g(s)$ 2) $\lim\limits_{s\to-2^-} g(s)$ 3) $\lim\limits_{s\to-2} g(s)$

5. $F(x) = \begin{cases} x^2 & \text{เมื่อ } x \leq 2 \\ 8-2x & \text{เมื่อ } 2 < x \end{cases}$

   1) $\lim\limits_{x\to2^+} F(x)$ 2) $\lim\limits_{x\to2^-} F(x)$ 3) $\lim\limits_{x\to2} F(x)$

6. $h(x) = \begin{cases} 2x+1 & \text{เมื่อ } x < 3 \\ 10-x & \text{เมื่อ } 3 \leq x \end{cases}$

   1) $\lim\limits_{x\to3^+} h(x)$ 2) $\lim\limits_{x\to3^-} h(x)$ 3) $\lim\limits_{x\to3} h(x)$

7. $g(r) = \begin{cases} 2r+3 & \text{เมื่อ } r < 1 \\ 2 & \text{เมื่อ } r = 1 \\ 7-2r & \text{เมื่อ } 1 < r \end{cases}$

1) $\lim\limits_{r\to 1^+} g(r)$ 2) $\lim\limits_{r\to 1^-} g(r)$ 3) $\lim\limits_{r\to 1} g(r)$

8. $g(t) = \begin{cases} 3+t^2 & \text{เมื่อ } t < -2 \\ 0 & \text{เมื่อ } t = -2 \\ 11-t^2 & \text{เมื่อ } -2 < t \end{cases}$

1) $\lim\limits_{t\to -2^+} g(t)$ 2) $\lim\limits_{t\to -2^-} g(t)$ 3) $\lim\limits_{t\to -2} g(t)$

9. $f(x) = \begin{cases} x^2-4 & \text{เมื่อ } x < 2 \\ 4 & \text{เมื่อ } x = 2 \\ 4-x^2 & \text{เมื่อ } 2 < x \end{cases}$

1) $\lim\limits_{x\to 2^+} f(x)$ 2) $\lim\limits_{x\to 2^-} f(x)$ 3) $\lim\limits_{x\to 2} f(x)$

10. $f(x) = \begin{cases} 2x+3 & \text{เมื่อ } x < 1 \\ 4 & \text{เมื่อ } x = 1 \\ x^2+2 & \text{เมื่อ } 1 < x \end{cases}$

1) $\lim\limits_{x\to 1^+} f(x)$ 2) $\lim\limits_{x\to 1^-} f(x)$ 3) $\lim\limits_{x\to 1} f(x)$

11. $f(x) = |x-5|$

1) $\lim\limits_{x\to 5^+} f(x)$ 2) $\lim\limits_{x\to 5^-} f(x)$ 3) $\lim\limits_{x\to 5} f(x)$

12. $f(x) = 3 + |2x-4|$

1) $\lim\limits_{x\to 2^+} f(x)$ 2) $\lim\limits_{x\to 2^-} f(x)$ 3) $\lim\limits_{x\to 2} f(x)$

จงหาค่าของ $\lim\limits_{x\to c^+} f(x)$, $\lim\limits_{x\to c^-} f(x)$ และ $\lim\limits_{x\to c} f(x)$ ต่อไปนี้

13. $f(x) = \begin{cases} 2x-1 & \text{เมื่อ } x < -2 \\ 1+3x & \text{เมื่อ } -2 \le x \le 2 \\ 3x & \text{เมื่อ } x > 2 \end{cases}$ และ $c = -2, 2$

14. $f(x) = \begin{cases} 5-2x & \text{เมื่อ } x > 3 \\ 3x-10 & \text{เมื่อ } x \le 3 \end{cases}$ และ $c = 3$

15. $f(x) = \begin{cases} \frac{x^3+8}{x+2} & \text{เมื่อ } x < -2 \\ \frac{x^2-4}{x+2} & \text{เมื่อ } x > -2 \end{cases}$ และ $c = -2$

16. $f(x) = \begin{cases} \sqrt{7+2x^2} & \text{เมื่อ } x \leq -1 \\ \frac{x^2-x+1}{4x+5} & \text{เมื่อ } x > -1 \end{cases}$ และ $c = -1$

17. $f(x) = \begin{cases} x^2+4 & \text{เมื่อ } x < 1 \\ 3x+2 & \text{เมื่อ } 1 \leq x < 2 \\ 2x^3-1 & \text{เมื่อ } 2 \leq x < 3 \end{cases}$ และ $c = 1, 2, 3$

18. $f(x) = \dfrac{x|x|}{x^2}$ และ $c = 0$

19. $f(x) = \dfrac{|x^2-1|}{x+1}$ และ $c = -1$

20. $f(x) = \dfrac{|x(x-3)|}{x-3}$ และ $c = 3$

21. จงหาค่าของ a และ b ที่ทำให้ $\lim\limits_{x \to -3} f(x)$ และ $\lim\limits_{x \to 3} f(x)$ มีค่า เมื่อ

$$f(x) = \begin{cases} 3x+6a & \text{เมื่อ } x < -3 \\ 3ax-7b & \text{เมื่อ } -3 \leq x \leq 3 \\ x-12b & \text{เมื่อ } x > 3 \end{cases}$$

22. กำหนดให้ $f(x) = \begin{cases} \frac{1+x}{1-x} & \text{เมื่อ } -2 \leq x \leq 0 \\ ax^2+b & \text{เมื่อ } 0 < x < 1 \\ 4+x & \text{เมื่อ } 1 \leq x \leq 2 \end{cases}$

จงหาค่าของ a และ b ที่ทำให้ $\lim\limits_{x \to 0} f(x)$ และ $\lim\limits_{x \to 1} f(x)$ มีค่า

23. จงหาค่าของ A ที่ทำให้ $\lim\limits_{x \to -1} f(x)$ มีค่า เมื่อ $f(x) = \begin{cases} \sqrt{7+2A} & \text{เมื่อ } x \leq -1 \\ \frac{x^2-x+1}{4x+5} & \text{เมื่อ } x > -1 \end{cases}$

24. กำหนดให้ $f(x) = \begin{cases} x|2-x| & \text{เมื่อ } x \leq -1 \\ \frac{x+1}{\sqrt{x+5}-2} & \text{เมื่อ } x > -1 \end{cases}$

จงตรวจสอบว่า $\lim\limits_{x \to -2} f(x)$ และ $\lim\limits_{x \to -1} f(x)$ หาค่าได้หรือไม่ เพราะเหตุใด

25. กำหนดให้ $f(x) = \begin{cases} 5x+2 & \text{เมื่อ } x \leq 2 \\ 1-3x & \text{เมื่อ } x > 2 \end{cases}$ จงหาค่าของ $\lim\limits_{h \to 0} \dfrac{f(2+h)-f(2)}{h}$

26. กำหนดให้ $f(x) = \begin{cases} \dfrac{\sin\left(x+\frac{\pi}{4}\right)-1}{2x-\frac{\pi}{2}} & \text{เมื่อ } x \neq \frac{\pi}{4} \\ 2\pi k+1 & \text{เมื่อ } x = \frac{\pi}{4} \end{cases}$
จงหาค่าของ k ที่ทำให้ฟังก์ชัน f มีความต่อเนื่องที่ $x = \frac{\pi}{4}$

27. กำหนดให้ $f(x) = \begin{cases} \dfrac{\tan kx}{x} & \text{เมื่อ } x < 0 \\ 3x+2k^2 & \text{เมื่อ } x \geq 0 \end{cases}$
จงหาค่าของ k ที่ทำให้ฟังก์ชัน f มีความต่อเนื่องที่ $x = 0$

28. $\lim\limits_{x \to 0^+} (4+\sqrt{x})$

29. $\lim\limits_{x \to 5^+} (\sqrt{x^2-25}+3)$

30. $\lim\limits_{x \to 2^-} (\sqrt{4-2x}-x^3)$

31. $\lim\limits_{x \to 1^-} \dfrac{|x(x-1)|}{x-1}$

32. $\lim\limits_{x \to 1^+} \dfrac{|x(x-1)|}{x-1}$

33. $\lim\limits_{x \to 4^+} \dfrac{\sqrt{3x-11}-1}{x-4}$

34. $\lim\limits_{x \to -2^+} \dfrac{|x+2|}{x+2}$

35. $\lim\limits_{x \to 2^-} \dfrac{x^2-4}{|2x-4|}$

36. $\lim\limits_{x \to 2} \dfrac{x^2-4}{|2x-4|}$

37. $\lim\limits_{x \to 5^-} \dfrac{\sqrt{25-x^2}}{x-5}$

3.7 แบบฝึกหัดที่ 7. ลิมิตค่าอนันต์และลิมิตที่ค่าอนันต์

คำสั่ง; ลิมิตของฟังก์ชันทุกข้อต่อไปนี้สามารถหาค่าได้จงคำนวณหาค่าลิมิตดังกล่าว

1. $\lim\limits_{t\to+\infty}\dfrac{2t+1}{5t-2}$
2. $\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{6x-4}{3x+1}$
3. $\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{2x+7}{4-5x}$
4. $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{1+5x}{2-3x}$
5. $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{7x^2-2x+1}{3x^2+8x+5}$
6. $\lim\limits_{s\to-\infty}\dfrac{4s^2+3}{2s^2-1}$
7. $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{x+4}{3x^2-5}$
8. $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{x^2+5}{x^3}$
9. $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{(2x+1)^2}{(3x-1)^2}$
10. $\lim\limits_{y\to+\infty}\dfrac{2y^3-4}{5y+3}$
11. $\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{5x^3-12x+7}{4x^2-1}$
12. $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{2x}{\sqrt{3x^2+4}}$
13. $\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{3x^2+4x-1}{(1-2x)^2}$
14. $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{2x+5}{\sqrt{7x^2+1}}$
15. $\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{\sqrt[3]{8x^3+5}}{5x-6}$
16. $\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{\sqrt{4x^2+8}}{3-5x}$
17. $\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{\sqrt{x^2+1}}{x+4}$
18. $\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{x^2+4x^3}{1-3x^2+5x^3}$
19. $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{(1-3x)^2}{4-3x+5x^2}$
20. $\lim\limits_{x\to-\infty}(3x+\dfrac{1}{x^2})$
21. $\lim\limits_{t\to+\infty}(\dfrac{2}{t^2}-4t)$
22. $\lim\limits_{x\to+\infty}(\sqrt{x^2+1}-x)$
23. $\lim\limits_{x\to-\infty}(\sqrt{x^2+x}-x)$
24. $\lim\limits_{r\to+\infty}(\sqrt{3r^2+r}-2r)$
25. $\lim\limits_{x\to+\infty}(\sqrt[3]{x^3+1}-x)$
26. $\lim\limits_{x\to-\infty}(\sqrt[3]{x^3+x}-\sqrt[3]{x^3+1})$
27. $\lim\limits_{x\to+\infty}(\sqrt{x^2+ax}-\sqrt{x^2+bx})$
28. $\lim\limits_{r\to+\infty}(\sqrt{3r^2+r}-2r)$
29. $\lim\limits_{x\to+\infty}(\sqrt{2x^2+1}-\sqrt{x^2-x})$

30. $\lim_{x\to+\infty}(\sqrt{x^2+ax}-x)$

31. $\lim_{t\to+\infty}\dfrac{\sqrt{t+\sqrt{t+\sqrt{t}}}}{\sqrt{t+1}}$

32. $\lim_{x\to+\infty}(\sqrt{x^2+3}-x)$

33. $\lim_{x\to+\infty}(\sqrt{x^2-3x}-x)$

34. $\lim_{x\to+\infty}\dfrac{\sqrt{x^4+1}-x}{x^2+1}$

35. $\lim_{x\to+\infty}[(x^2+1)^{-1/2}-(x^2-1)^{-1/2}]$

36. $\lim_{x\to+\infty}x(x-\sqrt{x^2+4})$

37. $\lim_{x\to+\infty}\dfrac{(2x+1)^2}{5x^2-4x+3}$

บทที่ 4

ตัวอย่างข้อสอบ

4.1 การหาค่าลิมิตของฟังก์ชัน

1. (โควตา มช. 2541) จงหา $\lim_{x \to 0} \frac{(1+x)^{\frac{3}{2}} - 1}{x}$
2. (โควตา มช. 2539) จงหา $\lim_{x \to 2} \frac{x^3 - 2x^2 - x + 2}{1 - (3-x)^4}$
3. (โควตา มช. 2538) จงหา $\lim_{x \to 3} \frac{3 - \frac{9}{x}}{\sqrt{3x} - 3}$
4. (โควตา มช. 2537) จงหา $\lim_{x \to -1} \frac{x+1}{2x + \sqrt{x^2+3}}$
5. (คณิตศาสตร์ กข 2546)
   $\lim_{x \to 0} \frac{1}{x} \left(\sqrt{1+x} - \sqrt{1-x} - \sqrt{(1+x)(1-x)^2} + \sqrt{(1-x)(1-x)^2} \right)$
   มีค่าเท่ากับเท่าใด
   (a) 0
   (b) $\frac{1}{4}$
   (c) $\frac{1}{2}$
   (d) 1

6. (คณิตศาสตร์ กข 2540) กำหนดให้ $f(x) = \begin{cases} \dfrac{\sqrt{4+x}-2}{x} & \text{เมื่อ } x \neq 0 \\ 1 & \text{เมื่อ } x = 0 \end{cases}$

   ข้อใดต่อไปนี้เป็นจริง

   (a) $\lim\limits_{x\to 0} f(x) = \dfrac{1}{4}$

   (b) $\lim\limits_{x\to 0} f(x) = 1$

   (c) $\lim\limits_{x\to 0^-} f(x)$ และ $\lim\limits_{x\to 0^+} f(x)$ หาค่าไม่ได้ทั้งคู่

   (d) $\lim\limits_{x\to 0^-} f(x)$ และ $\lim\limits_{x\to 0^+} f(x)$ หาค่าได้แต่ไม่เท่ากัน

7. (คณิตศาสตร์ กข 2539) ค่าของ $\lim\limits_{x\to 2^-} \dfrac{\sqrt{(x-2)^2}}{(x-2)}$ เท่ากับข้อใดต่อไปนี้

   (a) -1

   (b) 0

   (c) 1

   (d) หาค่าไม่ได้

8. (คณิตศาสตร์ กข 2538) กำหนดให้ $f(x) = \begin{cases} \dfrac{|x|-1}{\sqrt{1-x}} & \text{เมื่อ } x < 1 \\ \dfrac{|1-x|}{\sqrt{1-\sqrt{x}}} & \text{เมื่อ } x > 1 \end{cases}$

   ข้อใดต่อไปนี้ถูก

   (a) $\lim\limits_{x\to 1^-} f(x)$ และ $\lim\limits_{x\to 1^+} f(x)$ หาค่าไม่ได้

   (b) $\lim\limits_{x\to 0^-} f(x) > 0$ และ $\lim\limits_{x\to 0^+} f(x) < 0$

   (c) $\lim\limits_{x\to 0^-} f(x) + \lim\limits_{x\to 0^+} f(x) = 2$

   (d) $\lim\limits_{x\to 0^-} f(x) + \lim\limits_{x\to 0^+} f(x) = -2$

9. (คณิตศาสตร์ กข 2541) กำหนดให้ $f(x) = \dfrac{|x^2-9|}{x-3}$ ข้อใดต่อไปนี้ถูก

   (a) $\lim\limits_{x\to -3} f(x) = 0$ และ $\lim\limits_{x\to 3} f(x)$ หาค่าไม่ได้

   (b) $\lim\limits_{x\to -3} f(x) = 0$ และ $\lim\limits_{x\to 3} f(x) = 6$

(c) $\lim_{x\to -3} f(x) = 0$ และ $\lim_{x\to 3} f(x) = -6$

(d) $\lim_{x\to -3} f(x)$ หาค่าไม่ได้ และ $\lim_{x\to 3} f(x) = 0$

10. (คณิตศาสตร์ กข 2537) ให้ $f(x) = 2 - |x^3 - 3|,\ g(x) = x^3$ และ $F(x) = f(g^{-1}(x))$
พิจารณาข้อความต่อไปนี้
(1.) $\lim_{x\to 3^-} F(x) = \lim_{x\to 3^+} F(x)$
(2.) $\lim_{x\to 3^-} \dfrac{F(x) - F(3)}{x-3} = \lim_{x\to 3^+} \dfrac{F(x) - F(3)}{x-3}$
ข้อใดต่อไปนี้ถูก

(a) ทั้ง (1) และ (2) ถูก

(b) (1) ถูก (2) ผิด

(c) (1) ผิด (2) ถูก

(d) ทั้ง (1) และ (2) ผิด

11. (คณิตศาสตร์ กข 2543) กำหนดให้ $f(x) = \begin{cases} x^3 & \text{เมื่อ } x > 0 \\ x - 1 & \text{เมื่อ } 0 \le x \le 1 \\ 0 & \text{เมื่อ } x \le 0 \end{cases}$

แล้ว $\lim_{x\to 0^-} f(x^2) + \lim_{x\to 1^+} \left(\dfrac{f(x-1)}{x+2} \right)$ มีค่าเท่าใด

(a) $\dfrac{-4}{3}$

(b) -1

(c) 0

(d) $\dfrac{1}{3}$

12. (คณิตศาสตร์ กข 2545) กำหนดให้ $a > 0$
และ กำหนดให้ $f(x) = \begin{cases} \dfrac{x}{x+2} & \text{เมื่อ } x < a \\ \dfrac{x+1}{x} & \text{เมื่อ } x > a \end{cases}$
และ $g(x) = x^2$ ถ้า $\lim_{x\to a^+} f \circ g\sqrt{x} - \sqrt{\lim_{x\to a^-} g \circ f\sqrt{x}} = \dfrac{11}{a(a+2)}$ แล้ว a มีค่าเท่าใด

(a) 1

(b) 3

(c) 5

(d) 9

13. (คณิตศาสตร์ กข 2540) กำหนดให้ $f(x) = \begin{cases} g(x) & \text{เมื่อ } x \leq 1 \\ \dfrac{x^3-1}{x^2-1} & \text{เมื่อ } x > 1 \end{cases}$

ถ้า f ต่อเนื่องที่ $x = 1$ แล้ว ค่าของ $\lim\limits_{x \to 1^-} ((x+3) \cdot g(x))$ เท่ากับข้อใดต่อไปนี้

(a) 1

(b) 3

(c) 6

(d) 9

14. (โควตา มช. 2547) กำหนด $\lim\limits_{x \to 0^+} f(x) = A$, $\lim\limits_{x \to 0^-} f(x) = B$

แล้ว $\lim\limits_{x \to 0^+} f(x^3 - 3)$ มีค่าเท่าใด

(a) A

(b) B

(c) $A^3 - B$

(d) 0

4.2 ความต่อเนื่องของฟังก์ชัน

15. (โควตา มช. 2538) กำหนดให้ $f(x) = \begin{cases} -1 & \text{เมื่อ } x \leq 0 \\ \dfrac{x+3}{3-x} & \text{เมื่อ } 0 < x < 2 \\ \sqrt{x+23} & \text{เมื่อ } x \geq 2 \end{cases}$

ข้อใดต่อไปนี้เป็นจริง

(a) f เป็นฟังก์ชันต่อเนื่องที่จุด $x = 0, 2$

(b) f เป็นฟังก์ชันไม่ต่อเนื่องที่จุด $x = 0, 2$

(c) f เป็นฟังก์ชันต่อเนื่องที่จุด $x = 0$ และ f เป็นฟังก์ชันไม่ต่อเนื่องที่จุด $x = 2$

(d) f เป็นฟังก์ชันต่อเนื่องที่จุด $x = 2$ และ f เป็นฟังก์ชันไม่ต่อเนื่องที่จุด $x = 0$

16. (คณิตศาสตร์ กข 2541) กำหนดให้ $f(x) = \begin{cases} \dfrac{1}{x-1} & \text{เมื่อ } x < -1 \\ x + \dfrac{1}{2} & \text{เมื่อ } -1 \le x \le 3 \\ \dfrac{3}{2} & \text{เมื่อ } x > 3 \end{cases}$

ข้อใดต่อไปนี้ถูก

(a) f เป็นฟังก์ชันต่อเนื่องที่ทุกจุดใน $\mathbb{R}$

(b) f เป็นฟังก์ชันต่อเนื่องที่ทุกจุดใน $\mathbb{R}$ ยกเว้นที่จุด $x = 3$

(c) f เป็นฟังก์ชันต่อเนื่องที่ทุกจุดใน $\mathbb{R}$ ยกเว้นที่จุด $x = -1$

(d) f เป็นฟังก์ชันต่อเนื่องที่ทุกจุดใน $\mathbb{R}$ ยกเว้นที่จุด $x = -1$ และ $x = 3$

17. (คณิตศาสตร์ กข 2537) ถ้า กำหนดให้ $h(x) = \begin{cases} 0 & \text{เมื่อ } x \le -1 \\ \dfrac{1}{x-1} & \text{เมื่อ } 1 < x \le 2 \\ 3 - x & \text{เมื่อ } x > 2 \end{cases}$

ข้อใดต่อไปนี้ถูก

(a) h ไม่ต่อเนื่องที่ $x = 1$ แต่ต่อเนื่องที่ $x = 2$

(b) h ไม่ต่อเนื่องที่ $x = 1$ และไม่ต่อเนื่องที่ $x = 2$

(c) h ต่อเนื่องที่ $x = 1$ และต่อเนื่องที่ $x = 2$

(d) h ต่อเนื่องที่ $x = 1$ แต่ไม่ต่อเนื่องที่ $x = 2$

18. (คณิตศาสตร์ กข 2537) กำหนดให้ $f(x) = \dfrac{x^3 - 2x^2 - x + 2}{x^2 - 1}$ ถ้าต้องการให้ f เป็นฟังก์ชันต่อเนื่องบนเซต
ของจำนวนจริงแล้ว จะต้องนิยามเพิ่มตามข้อใดต่อไปนี้

(a) $f(-1) = 1$ และ $f(1) = -1$

(b) $f(-1) = 3$ และ $f(1) = -1$

(c) $f(-1) = -1$ และ $f(1) = -3$

(d) $f(-1) = -3$ และ $f(1) = 3$

19. (โควตา มช. 2543) กำหนดให้ $f(x) = \begin{cases} \dfrac{(x-1)^2}{x-2\sqrt{x}+1} & \text{เมื่อ } x > 0,\ x \neq 1 \\ k & \text{เมื่อ } x = 1 \end{cases}$

จำนวนจริง k ในข้อใดที่ทำให้ f มีความต่อเนื่องที่จุด $x = 1$

(a) 0

(b) 1

(c) 2

(d) 4

20. (โควตา มช. 2542) กำหนดให้ $f(x) = \begin{cases} \dfrac{(x-1)}{x^2-1} & \text{เมื่อ } x \neq \pm 1 \\ \dfrac{1}{2} & \text{เมื่อ } x = \pm 1 \end{cases}$

ข้อใดถูกต้อง

(a) f ไม่มีลิมิตที่ $x = 1$

(b) f มีลิมิตที่ $x = -1$

(c) f ต่อเนื่องที่ $x = 1$

(d) f ต่อเนื่องที่ $x = -1$

21. (โควตา มช. 2545) กำหนดให้ $f(x) = \begin{cases} x + \dfrac{3}{x^2-1} & \text{เมื่อ } x \leq 0 \\ 3 & \text{เมื่อ } 0 < x \leq 2 \\ \dfrac{x^2-x-2}{x-2} & \text{เมื่อ } x > 2 \end{cases}$

ข้อใดต่อไปนี้ถูกต้อง

(a) f เป็นฟังก์ชันต่อเนื่องที่ $x = 0$ และ $x = 2$

(b) f เป็นฟังก์ชันไม่ต่อเนื่องที่ $x = 0$ และ $x = 2$

(c) f เป็นฟังก์ชันต่อเนื่องที่ $x = 0$ แต่ไม่ต่อเนื่องที่ $x = 2$

(d) f เป็นฟังก์ชันไม่ต่อเนื่องที่ $x = 0$ แต่ต่อเนื่องที่ $x = 2$

22. (โควตา มช. 2548) กำหนดให้ $f(x) = \begin{cases} 1 + \dfrac{4}{x-5} & \text{เมื่อ } x < 2 \\ \dfrac{x^2 - 4x}{x^2 + 5x} & \text{เมื่อ } 0 < x \le 1 \\ \dfrac{\sqrt{x} - 1}{1 - x} & \text{เมื่อ } x > 1 \end{cases}$

ข้อใดต่อไปนี้ถูกต้อง

(a) f เป็นฟังก์ชันต่อเนื่องที่ $x = 0$ และ $x = 1$

(b) f เป็นฟังก์ชันไม่ต่อเนื่องที่ $x = 0$ และ $x = 1$

(c) f เป็นฟังก์ชันต่อเนื่องที่ $x = 0$ แต่ไม่ต่อเนื่องที่ $x = 1$

(d) f เป็นฟังก์ชันไม่ต่อเนื่องที่ $x = 0$ แต่ต่อเนื่องที่ $x = 1$

23. (ประยุกต์โควตา มช. 2549) กำหนดให้

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{(x^2 - 1)}{x - 1} & \text{เมื่อ } 0 \le x \le 1,\ x \ne 1 \\ 5 & \text{เมื่อ } x = 1 \\ 3 + \sqrt{1 - (x-3)^2} & \text{เมื่อ } 2 < x \le 4 \end{cases}$$

f มีความต่อเนื่องที่จุด $x = 1$ หรือไม่

24. (โควตา มช. 2544) กำหนดให้ $f(x) = \begin{cases} |x^2 - 5x - 6| & \text{เมื่อ } x > 2 \\ 10x - k & \text{เมื่อ } x \le 2 \end{cases}$

จงหาจำนวนจริง k ที่ทำให้ f มีความต่อเนื่องที่จุด $x = 2$

25. (โควตา มช. 2537) กำหนดให้ $f(x) = \begin{cases} \dfrac{2x^2 - x - 1}{x - 1} & \text{เมื่อ } x < 0 \\ a(x-2) + 2 & \text{เมื่อ } x \ge 1 \end{cases}$

จงหาจำนวนจริง a ที่ทำให้ฟังก์ชัน f มีความต่อเนื่องที่จุด $x = 1$

4.3 ลิมิตของฟังก์ชันที่ค่าอนันต์

26. (โควตา มช. 2538) จงหาค่าของ $\displaystyle\lim_{n\to\infty} \frac{2n(1-5)^n}{(n+1)5^n}$

27. (โควตา มช. 2539) จงหาค่าของ $\lim_{n\to\infty}\left(\frac{1^2+2^2+3^2+\ldots+(2n-1)^2}{n^3}\right)$

28. (โควตา มช. 2540) ให้ $f(x)=x^2$ จงหาค่าของ $\lim_{n\to\infty}\left[f\left(\frac{1}{10}+\frac{1}{n}\right)-f\left(\frac{1}{10}\right)\right]$ เมื่อ $n\in\mathbb{Z}^+$

29. (โควตา มช. 2544) จงหา $\lim_{x\to\infty}\left(\frac{5}{6}+\frac{13}{6^2}+\frac{35}{6^3}+\ldots+\frac{2^2+3^n}{6^n}\right)$

30. (โควตา มช. 2541) กำหนด $a_n=\frac{n^2+1}{4^{n-1}}$ เมื่อ $n=1,2,3,\ldots$ จงหา $\lim_{x\to\infty}\frac{a_{n+1}}{a_n}$

31. (โควตา มช. 2541) กำหนดให้ลำดับ $a_n=\frac{2^n+5}{2n+3}$ และ ลำดับ $b_n=\frac{2^n}{n}$ แล้ว $\frac{a_n}{b_n}$ มีค่าเท่าใด

    (a) $\frac{5}{2}$

    (b) $\frac{5}{3}$

    (c) $\frac{1}{2}$

    (d) $\frac{1}{3}$

ภาคผนวก ก

ความรู้เพิ่มเติม

ก.1 สัญลักษณ์ที่นักเรียนควรทราบ

$$\mathbb{N} = \{1, 2, 3, \cdots\} \quad \text{(เซตของจำนวนธรรมชาติ หรือ เซตของจำนวนเต็มบวก)}$$
$$\mathbb{Z} = \{\cdots, -3, -2, -1, 0, 1, 2, 3, \cdots\} \quad \text{(เซตของจำนวนเต็ม)}$$
$$\mathbb{Z}^- = \{\cdots, -3, -2, -1\} \quad \text{(เซตของจำนวนเต็มลบ)}$$
$$\mathbb{Z}^+ = \{1, 2, 3, \cdots\} \quad \text{(เซตของจำนวนเต็มบวก)}$$
$$\mathbb{Q} = \left\{\frac{n}{m} \mid n, m \in \mathbb{Z} \text{ และ } m \neq 0\right\} \quad \text{(เซตของจำนวนตรรกยะ)}$$
$$\mathbb{R} = \text{เซตของจำนวนจริง}$$
$$\mathbb{C} = \{(a, b) = a + bi | a, b \in \mathbb{R}\} \quad \text{(เซตของจำนวนเชิงซ้อน)}$$

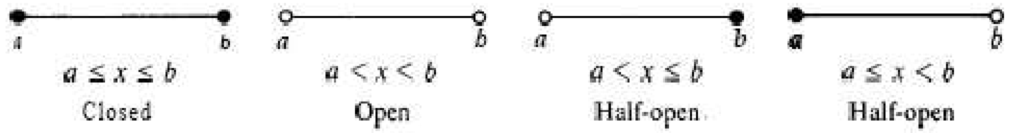
ก.2 ความรู้พื้นฐาน

- $a^2 - b^2 = (a - b)(a + b)$
- $a^3 - b^3 = (a - b)(a^2 + ab + b^2)$
- $a^3 + b^3 = (a + b)(a^2 - ab + b^2)$
- $a^4 - b^4 = (a^2 - b^2)(a^2 + b^2) = (a - b)(a + b)(a^2 + b^2)$

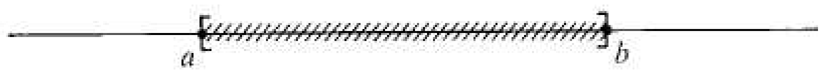
- $(a+b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$
- $(a-b)^2 = a^2 - 2ab + b^2$
- $(a+b)^3 = a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3$
- $(a-b)^3 = a^3 - 3a^2b + 3ab^2 - b^3$
- สังยุคของ $a \pm b$ คือ $a \mp b$
- $|x| = \begin{cases} x & \text{เมื่อ } x \geq 0 \\ -x & \text{เมื่อ } x < 0 \end{cases}$
- $\sqrt{x^2} = |x|, \forall x \in \mathbb{R}$
- $x - y = (\sqrt{x})^2 - (\sqrt{y})^2 = (\sqrt{x} - \sqrt{y})(\sqrt{x} + \sqrt{y})$
- $x - y = (\sqrt[3]{x})^3 - (\sqrt[3]{y})^3 = (\sqrt{x} - \sqrt{y})(\sqrt[3]{x}^2 + \sqrt[3]{x}\sqrt[3]{y} + \sqrt[3]{y}^2)$
- $\sin(-\theta) = -\sin\theta$
- $\cos(-\theta) = \cos\theta$
- $\sin^2\theta + \cos^2\theta = 1$
- $\cos(A \pm B) = \cos A \cos B \mp \sin A \sin B$
- $\sin(A \pm B) = \sin a \cos A \pm \cos A \sin B$
- $\tan(A \pm B) = \dfrac{\tan A \pm \tan B}{1 \mp \tan A \tan B}$
- $\sin 2A = 2 \sin A \cos A$
- $\cos 2A = \cos^2 A - \sin^2 A = 1 - 2\sin^2 A = 2\cos^2 A - 1$
- $\tan 2A = \dfrac{2\tan A}{1 - \tan^2 A}$
- $\sin 3A = 3\sin A - 4\sin^3 A$
- $\cos 3A = 4\cos^3 A - 3\cos A$
- $\cos \dfrac{A}{2} = \pm\sqrt{\dfrac{1 + \cos A}{2}}$

- $\sin\frac{A}{2} = \pm\sqrt{\frac{1-\cos A}{2}}$
- $\tan\frac{A}{2} = \pm\sqrt{\frac{1-\cos A}{1+\cos A}} = \frac{\sin A}{1+\cos A} = \frac{1-\cos A}{\sin A}$
- $2\sin A\cos B = \sin(A+B) + \sin(A-B)$
- $2\cos A\sin B = \sin(A+B) - \sin(A-B)$
- $2\cos A\cos B = \cos(A+B) + \cos(A-B)$
- $2\sin A\sin B = \cos(A-B) - \cos(A+B)$
- $\sin A + \sin B = 2\sin\left(\frac{A+B}{2}\right)\cos\left(\frac{A-B}{2}\right)$
- $\sin A - \sin B = 2\cos\left(\frac{A+B}{2}\right)\sin\left(\frac{A-B}{2}\right)$
- $\cos A + \cos B = 2\cos\left(\frac{A+B}{2}\right)\cos\left(\frac{A-B}{2}\right)$
- $\cos A - \cos B = -2\sin\left(\frac{A+B}{2}\right)\sin\left(\frac{A-B}{2}\right)$

ก.3 ช่วงของจำนวนจริง



รูปที่ ก.1: ช่วงต่างๆ

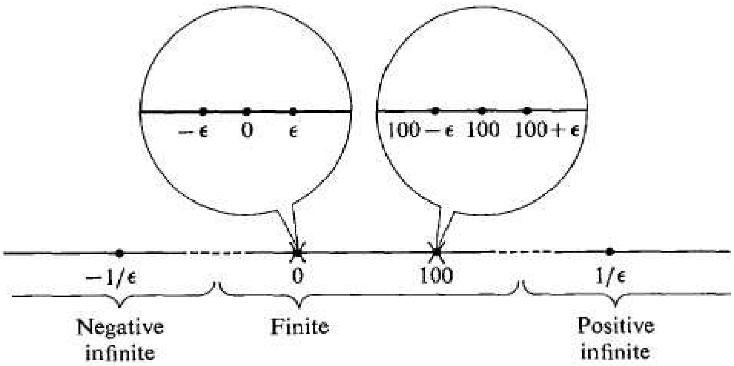


รูปที่ ก.2: ช่วงปิด $[a, b]$

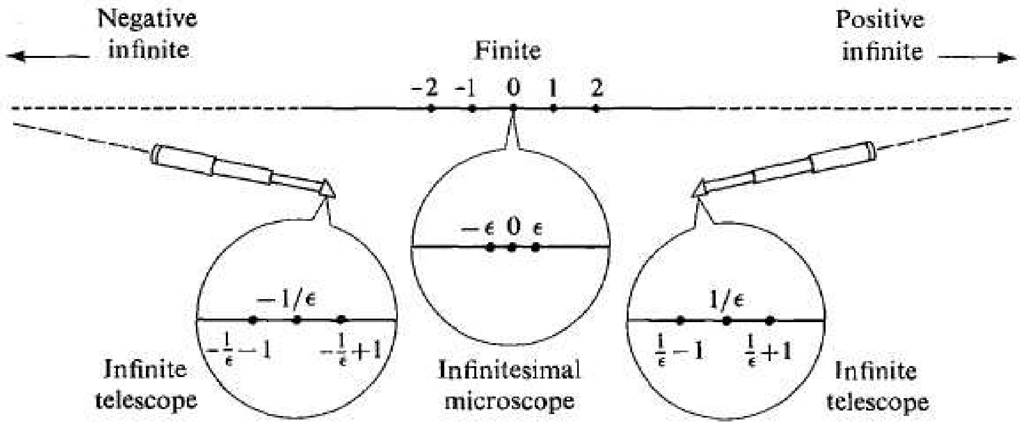
รูปที่ ก.3: ช่วงปิด (a, b)

ก.4 กราฟของลิมิต(เพิ่มเติม)

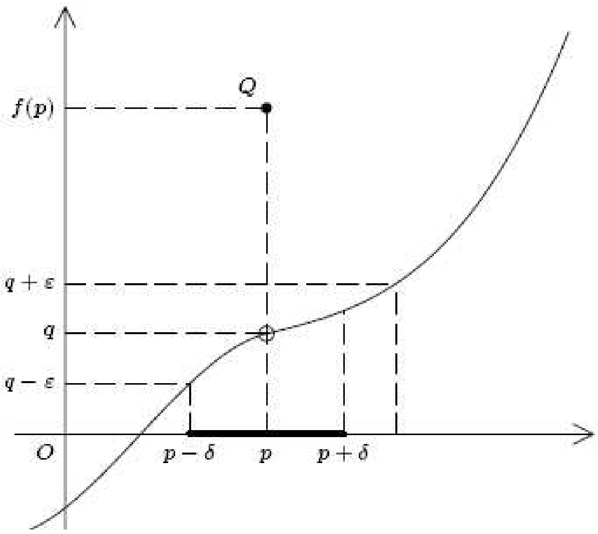
ก.4.1 ลิมิตของฟังก์ชัน



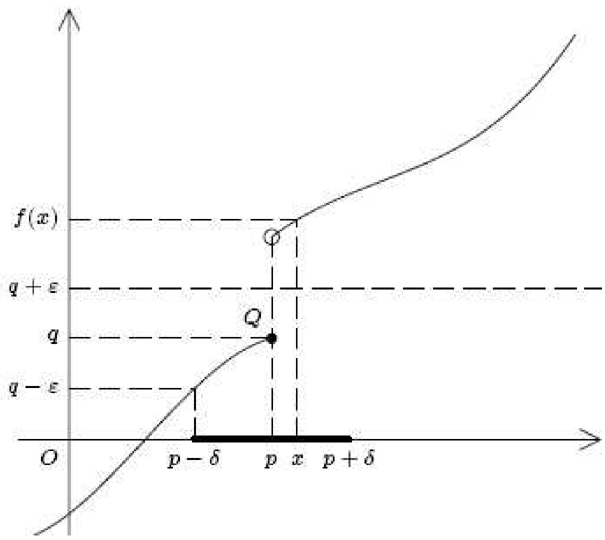
รูปที่ ก.4: เส้นจำนวนจริง 1; $\mathbb{R}$



รูปที่ ก.5: เส้นจำนวนจริง 2; $\mathbb{R}$

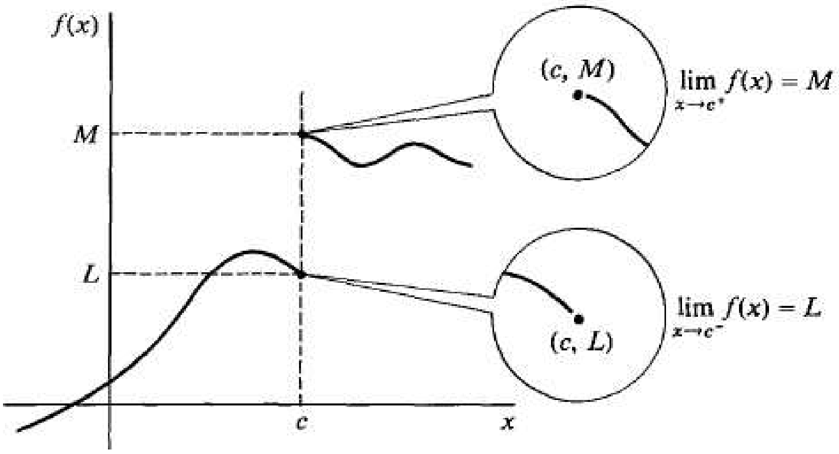


รูปที่ ก.6: $\lim_{x \to p} f(x)$ ต่อเนื่อง



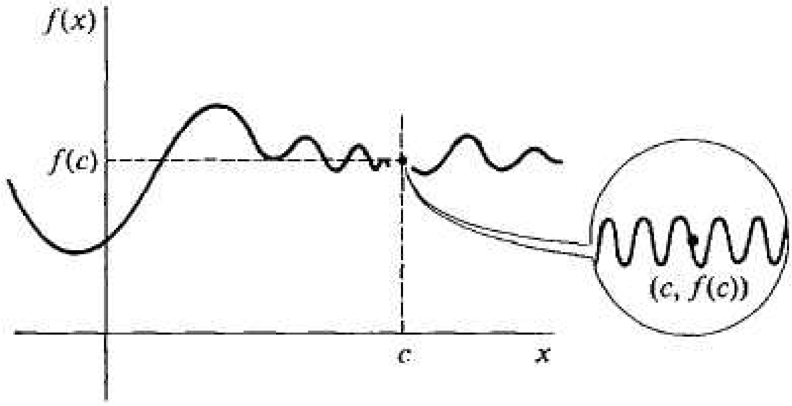
รูปที่ ก.7: $\lim_{x \to p} f(x)$ ไม่ต่อเนื่อง

ก.4.2 ลิมิตด้านเดียว

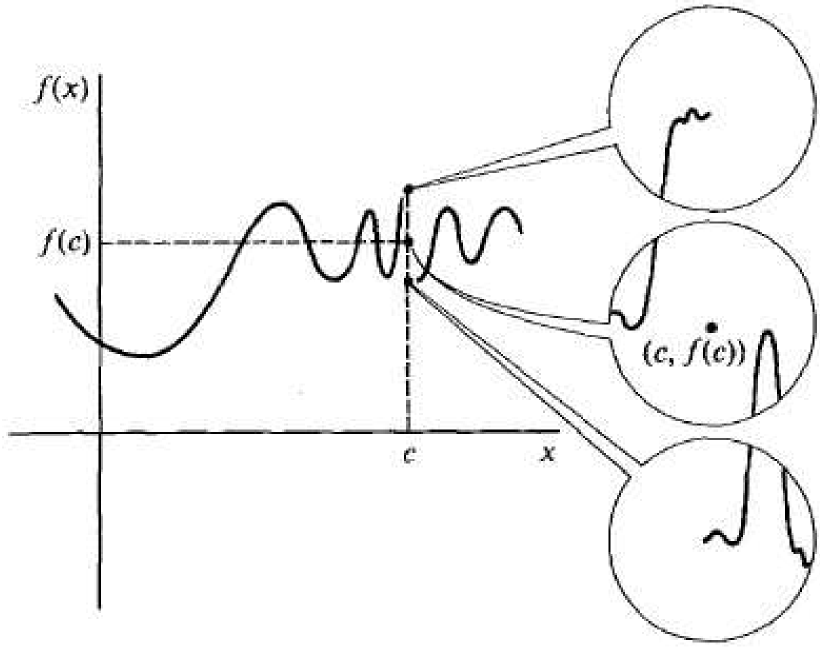


รูปที่ ก.8: $\lim_{x\to c^-} f(x) = L$ และ $\lim_{x\to c^+} f(x) = M$

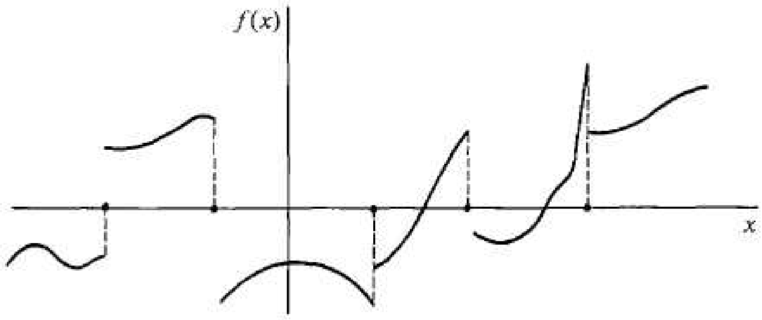
ก.4.3 ความต่อเนื่องของฟังก์ชัน



รูปที่ ก.9: ฟังก์ชัน $f(x)$ ต่อเนื่องที่จุด $x = c$



รูปที่ ก.10: ฟังก์ชัน $f(x)$ ไม่ต่อเนื่องที่จุด $x = c$



รูปที่ ก.11: ฟังก์ชัน $f(x)$ ไม่ต่อเนื่อง

ดรรชนี