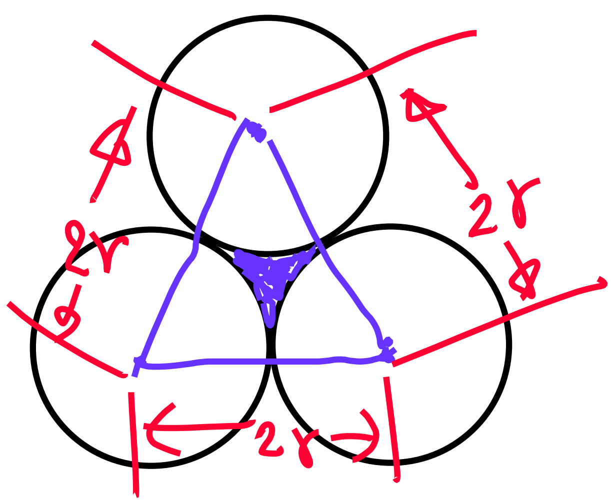
Miscellaneous Mathematics

ปกิณกะคณิตศาสตร์

ครูอาหนึ่ง ชูไวย arnuengc@hotmail.com

กลุ่มสาระการเรียนรู้คณิตศาสตร์ โรงเรียนเทิงวิทยาคม
สำนักงานเขตพื้นที่การศึกษามัธยมศึกษา เขต 36

**“จงอย่าพึ่งรีบใช้ผ้าเช็ดน้ำที่หยดลงพื้นในทันที...
แต่จงพึงใช้ผ้านั้นซับหยดน้ำและรอยน้ำแทนการเช็ดน้ำ
การแก้ปัญหาก็เหมือนกับวิธีการเช็ดน้ำ....................
เพราะ...ถ้ารีบเช็ดน้ำ ผ้าก็ซับน้ำไม่ทัน มีแต่หยดน้ำที่ต้องกระเด็นเป็นวงกว้าง
เหมือนปัญหาที่ขยายอย่างไม่รู้จบสิ้น...การค่อยๆ ซับน้ำก็เหมือนกับการเริ่มรู้จัก เรียนรู้
และเข้าใจปัญหา...น้ำที่ค่อยๆ หมดไปด้วยการดูดซับผ่านเนื้อผ้า
เปรียบเสมือนว่าเราเริ่มแก้ปัญหาได้ด้วยเหตุผล น้ำไม่เลอะเปรอะเปื้อนฉันใด
ปัญหาก็น้อยความฉันนั้น แต่ผู้เช็ดน้ำกลับได้รับอะไรดีๆ
จากการเช็ดน้ำที่ต่างวิธีกันอย่างมหาศาล”** [1]



ฉบับปรับปรุง 24 มกราคม 2554

โดย ครูอาหนึ่ง ชูไวย โรงเรียนเทิงวิทยาคม สพม. เขต 36

[1]คุณพ่อชิต และคุณแม่ย้าย ชูไวย–บิดา มารดา ครูอาหนึ่ง ชูไวย

บูชาอาจาริยคุณแด่บูรพาจารย์คณิตศาสตร์

ข้าพเจ้าขอบมอบคุณความดีในครั้งนี้แด่บูรพาจารย์ทางคณิตศาสตร์ที่กรุณาเมตตาอบรมสั่งสอนให้ข้าพเจ้ามีความรู้แตกฉานทางคณิตศาสตร์ ขอน้อมยอกรอุทิศ น้อมจิตอธิษฐานในผลบุญกุศล อันเกิดจากการเขียนเอกสารในครั้งนี้ นบเหนือเกล้าเป็นเครื่องบูชา สักการะคุณ แด่คุรุอุปัชชาย์ ครูอาจารย์ ซึ่งเป็นเสมือนปาจารย์ในหมู่ศิษย์ของข้าพเจ้า ดังมีรายนามต่อไปนี้ ด้วยความเคารพ รัก ศรัทธา และนับถือเทิดทูนยิ่ง

- คุณพ่อชิต ชูไวย
- คุณแม่ย้าย ชูไวย
- คุณยายต่อม ค้าแป้ง
- ศาสตราจารย์ ดร.บรรพต สุวรรณประเสริฐ
- ศาสตราจารย์ ดร.ณรงค์ ปั้นนิ่ม
- ศาสตราจารย์ ดร.สมยศ พลับเที่ยง
- Professor Dr. Yong-Gao Chen
- Professor Dr. Sheng Bau
- Professor Dr. Kause Denéke
- Professor Dr. Ping Zang
- Professor Dr. David A. Paris
- รองศาสตราจารย์ ดร.ปราโมทย์ มากชู
- รองศาสตราจารย์ ภัทรา เตชาภิวาทย์
- รองศาสตราจารย์ ปราโมทย์ ประเสริฐ
- รองศาสตราจารย์ ม.ล.จันทรศรี ชมพูนุท
- รองศาสตราจารย์ วิวรรธน์ วณิชาภิชาติ
- รองศาสตราจารย์ ดร.บุญญา เพียรสวรรค์
- รองศาสตราจารย์ ศรีวรรณ ฤกษ์ภิริทัต
- ผู้ช่วยศาสตราจารย์ ดร.มาโนชญ์ สิริพิทักษ์เดช
- ผู้ช่วยศาสตราจารย์ ดร.เกตุจันทร์ จำปาไชยศรี
- ผู้ช่วยศาสตราจารย์ ดร.ชัยวัฒน์ นามนาค
- ผู้ช่วยศาสตราจารย์ ดร.นรินทร์ เพชรโรจน์
- ผู้ช่วยศาสตราจารย์ ดร.ระเบียน วังคีรี
- Assistant Professor Dr. W.W.L. Chen
- Assistant Professor Dr. David A. Santos
- อาจารย์ ดร.อัญชลีย์ แก้วเจริญ
- อาจารย์สุภาพร สุขเสริญ
- อาจารย์สมพร กล่ำเทศ
- ครูวิบูลย์ วิชชานุภาพ
- ครูศุภาภรณ์ จอมชาญพันธุ์
- ครูนิภาพร เขื่อนแก้ว
- ครูอัลจนา จินดารัตน์
- ครูปรีชา จันทกาญน์
- ครูศุภาลักษณ์ ศรีกัลยาณบุตร
- ครูตุลาพร แสนธิ
- ครูประสาน คันธเรศ
- ครูสุพรรณ์ ธนะหมอก
- ครูนิวัตร คำดอน
- ครูยุพิณ คำดอน

- ครูอดิศัย ธรรมโชติ
- ครูคนึง ธรรมโชติ
- ครูพิมพ์ ค้ากำยาน
- ครูสุวิทย์ แก้วอินทร์
- ครูสุข จันทวีชัย
- ครูจวงจันทร์ จันทร์ทิมา

คำนำ

การเรียนคณิตศาสตร์ให้ประสบความสำเร็จได้ดีนั้น ผู้ศึกษาจะต้องมีความรู้ความเข้าใจในพื้นฐานคณิตศาสตร์ มีทักษะการคิดและกระบวนการทางคณิตศาสตร์ อันได้แก่ ความรู้ ความสามารถในการแก้ปัญหาด้วยวิธีการที่หลากหลาย ตลอดจนมีความเข้าใจและรู้จักการใช้เหตุผล มีความคิดริเริ่มสร้างสรรค์ สามารถทำงานอย่างเป็นระบบ มีระเบียบวินัย มีความรอบคอบ และนำความรู้นั้นไปประยุกต์เชื่อมโยงกับศาสตร์อื่นๆได้เป็นอย่างดี**สิ่งที่สำคัญก็คือมีเจตคติที่ดีต่อวิชา คณิตศาสตร์**

ผู้เรียบเรียงขอมอบคุณความดีในการจัดทำเอกสารเล่มนี้แด่ครูอาจารย์ทุกท่านที่ประสิทธิ์ประสาทวิชาความรู้ คณะผู้บริหาร โรงเรียนเทิงวิทยาคมที่ส่งเสริมการพัฒนาผลงานด้านวิชาการ สถาบันส่งเสริมการสอนวิทยาศาสตร์และเทคโนโลยี(สสวท.) ที่มอบทุนการศึกษาโครงการ สควค. ให้ผู้เรียบเรียงตลอดระยะเวลา 5 ปี จนจบการศึกษา และน้อมเป็นเครื่องสักการะบูชาพระคุณแด่บิดามารดา และคุณยายต่อม ค้าแป้ง ผู้ล่วงลับที่เป็นกำลังใจให้ข้าพเจ้าตลอดมา

อนึ่ง หากมีข้อผิดพลาดหรือข้อเสนอแนะประการใดสำหรับเอกสารเล่มนี้ข้าพเจ้ายินดีรับฟังและจะแก้ไขต่อไป ขอขอบพระคุณเป็นอย่างสูงมา ณ โอกาสนี้

อาหนึ่ง ชูไวย
กลุ่มสาระการเรียนรู้คณิตศาสตร์
โรงเรียนเทิงวิทยาคม
อำเภอเทิง จังหวัดเชียงราย
arnuengc@hotmail.com

1 เลขยกกำลัง

1.1 ทบทวนความรู้เบื้องต้น

1. $\mathbb{R} = \mathbb{Q} \cup \mathbb{Q}'$

2. $\mathbb{Q} \cap \mathbb{Q}' = \varnothing$

3. $\mathbb{R}^+ \cap \mathbb{R}^- = \varnothing$

4. $\mathbb{Z}^+ \cap \mathbb{Z}^- = \varnothing$

5. จำนวนเต็ม(integers) คือ จำนวนที่ไม่อยู่ในรูปเศษส่วน(fraction)และทศนิยม (decimal) ประกอบด้วย $\boxed{\ldots,-3,-2,-1,0,1,2,3,\ldots}$ (นั่นคือ ไม่มีจำนวนเต็มที่น้อยที่สุดและไม่มีจำนวนเต็ม ที่มากที่สุด)

$\mathbb{Z} = \mathbb{Z}^- \cup \mathbb{Z}^{\mathbf{0}} \cup \mathbb{Z}^+$ และ $\mathbb{Z}$ เป็นเซตอนันต์

6. จำนวนเต็มลบ(negaitive integers) ประกอบด้วย $\boxed{\ldots,-3,-2,-1}$ (นักเรียนจะสังเกตได้ว่า จำนวนเต็มลบ ที่มากที่สุด คือ $\boxed{\mathbf{-1}}$ แต่ไม่มีจำนวนเต็มลบที่น้อยที่สุด เนื่องจากจำนวนเต็มลบ จำนวนถัดไปจะมีค่าลดลง จากจำนวนก่อนหน้าครั้งละ **1** เสมอ)

$\boldsymbol{x_{max}} \in \mathbb{Z}^- = \mathbf{-1}$ แต่ ไม่มี $\boldsymbol{x_{min}} \in \mathbb{Z}^-$ และ $\mathbb{Z}^-$ เป็นเซตอนันต์

7. จำนวนเต็มศูนย์ (zero) มีเพียงตัวเดียวเท่านั้น คือ $\boxed{\mathbf{0}}$ (นั่นคือ จำนวนเต็มศูนย์ ไม่เป็น จำนวนเต็มลบและ ไม่เป็นจำนวนเต็มบวก)

$\mathbb{Z}^{\mathbf{0}}$ เป็นเซตจำกัด

8. จำนวนเต็มบวก(positive integers) ประกอบด้วย $\boxed{1,2,3,\ldots}$ (นักเรียนจะสังเกตได้ว่า จำนวนเต็มบวก ที่น้อยที่สุด คือ $\boxed{\mathbf{1}}$ แต่ไม่มีจำนวนเต็มบวกที่มากที่สุด เนื่องจากจำนวนเต็มบวกจำนวนถัดไปจะมีค่าเพิ่มขึ้น จากจำนวนก่อนหน้าครั้งละ **1** เสมอ)

ไม่มี $x_{max} \in \mathbb{Z}^+$ แต่ $x_{min} \in \mathbb{Z}^+ = \mathbf{1}$ และ $\mathbb{Z}^+$ เป็นเซตอนันต์

9. จำนวนเต็มที่ไม่ใช่จำนวนเต็มลบ คือ $\boxed{\mathbf{0,1,2,3,\ldots}}$ (นั่นคือ จำนวนเต็มที่ไม่ใช่จำนวนเต็มลบเป็นจำนวนที่รวมจำนวนเต็มศูนย์กับจำนวนเต็มบวกไว้ด้วยกัน)

เซตของจำนวนเต็มที่ไม่ใช่จำนวนเต็มลบ คือ $\{\mathbf{0}\} \cup \mathbb{Z}^+$

10. จำนวนเต็มที่ไม่ใช่จำนวนเต็มบวก คือ $\boxed{\mathbf{\ldots,-3,-2,-1,0}}$ (นั่นคือจำนวนเต็มที่ไม่ใช่จำนวนเต็มบวกเป็นจำนวนที่รวมจำนวนเต็มศูนย์กับจำนวนเต็มลบไว้ด้วยกัน)

เซตของจำนวนเต็มที่ไม่ใช่จำนวนเต็มบวก คือ $\mathbb{Z}^- \cup \{\mathbf{0}\}$

11. จำนวนเต็มคู่ คือ จำนวนที่ **2** หารลงตัว (จำนวนที่หารด้วย **2** แล้ว ไม่มีเศษ หรือ เศษเป็น **0**)
ถ้า $\boldsymbol{x}$ เป็นจำนวนเต็มคู่ แล้ว $\mathbf{2}|\boldsymbol{x}$ เช่น $\mathbf{2,4,6,\ldots,2}\boldsymbol{n}$ โดยที่ $\boldsymbol{n} \in \mathbb{Z}$

เซตของจำนวนเต็มคู่ คือ $\{\boldsymbol{x}|\boldsymbol{x} = \mathbf{2}\boldsymbol{n}, \boldsymbol{n} \in \mathbb{Z}\}$

12. จำนวนเต็มคี่ คือ จำนวนที่ **2** หารไม่ลงตัว และเหลือเศษเป็น **1**
ถ้า $\boldsymbol{x}$ เป็นจำนวนเต็มคี่ แล้ว $\mathbf{2} \nmid \boldsymbol{x}$ เช่น $\mathbf{1,3,5,\ldots,2}\boldsymbol{n}+\mathbf{1}$ หรือ $\mathbf{2}\boldsymbol{n}-\mathbf{1}$ โดยที่ $\boldsymbol{n} \in \mathbb{Z}$

เซตของจำนวนเต็มคี่ คือ $\{\boldsymbol{x}|\boldsymbol{x} = \mathbf{2}\boldsymbol{n}+\mathbf{1}, \boldsymbol{n} \in \mathbb{Z}\}$

เซตของจำนวนเต็มคี่ คือ $\{\boldsymbol{x}|\boldsymbol{x} = \mathbf{2}\boldsymbol{n}-\mathbf{1}, \boldsymbol{n} \in \mathbb{Z}\}$

13. สมบัติไตรวิภาค (trichotomy properties) กล่าวว่า จำนวนเต็ม $\boldsymbol{a}$ ต้องเป็นจำนวนเต็มประเภทใดประเภทหนึ่ง ใน 3 กรณีต่อไปนี้ เพียงอย่างเดียวเท่านั้น คือ

   - $\boldsymbol{a<0}$ ($\boldsymbol{a}$ ต้องเป็นจำนวนเต็มลบเพียงอย่างเดียวเท่านั้น) หรือ
   - $\boldsymbol{a=0}$ ($\boldsymbol{a}$ ต้องเป็นจำนวนเต็มศูนย์เพียงอย่างเดียวเท่านั้น) หรือ
   - $\boldsymbol{a>0}$ ($\boldsymbol{a}$ ต้องเป็นจำนวนเต็มบวกเพียงอย่างเดียวเท่านั้น)

14. กำหนดให้ $\boldsymbol{a,b}$ และ $\boldsymbol{c}$ เป็นจำนวนเต็มใดๆ จะได้ว่า

   - $\boldsymbol{a+b}$ เป็นจำนวนเต็ม (จำนวนเต็มบวกกับจำนวนเต็มได้ผลลัพธ์เป็นจำนวนเต็ม) (สมบัติปิดการบวก) (additive closure property)
   - $\boldsymbol{a\times b}$ เป็นจำนวนเต็ม (จำนวนเต็มคูณกับจำนวนเต็มได้ผลลัพธ์เป็นจำนวนเต็ม) (สมบัติปิดการคูณ) (multiplicative closure property)
   - ถ้า $\boldsymbol{a>0}$ และ $\boldsymbol{b>0}$ แล้ว $\boldsymbol{a+b>0}$
   - ถ้า $\boldsymbol{a<0}$ และ $\boldsymbol{b<0}$ แล้ว $\boldsymbol{a+b<0}$
   - $|\boldsymbol{a}|$ (อ่านว่าค่าสัมบูรณ์ของ $\boldsymbol{a}$) คือ ระยะห่างจาก $\boldsymbol{a}$ ถึง $\boldsymbol{0}$ มีค่าเป็นศูนย์ หรือมีค่าเป็นบวกเสมอ (เพราะระยะไม่ติดลบ)

$$\boxed{|\boldsymbol{a}| = \begin{cases} \boldsymbol{a} & \text{เมื่อ } \boldsymbol{a\geq 0} \\ -\boldsymbol{a} & \text{เมื่อ } \boldsymbol{a<0} \end{cases}}$$

นั่นคือ $|\boldsymbol{a}|\geq \boldsymbol{0}$ เสมอ

   - ถ้า $\boldsymbol{a>0}$ และ $\boldsymbol{b<0}$ และ $|\boldsymbol{a}|>|\boldsymbol{b}|$ แล้ว $\boldsymbol{a+b>0}$
   - ถ้า $\boldsymbol{a>0}$ และ $\boldsymbol{b<0}$ และ $|\boldsymbol{a}|<|\boldsymbol{b}|$ แล้ว $\boldsymbol{a+b<0}$
   - ถ้า $\boldsymbol{a>b}$ แล้ว $\boldsymbol{a+c>b+c}$
   - ถ้า $\boldsymbol{a>b}$ และ $\boldsymbol{c>0}$ แล้ว $\boldsymbol{ac>bc}$
   - ถ้า $\boldsymbol{a>b}$ และ $\boldsymbol{c<0}$ แล้ว $\boldsymbol{ac<bc}$
   - ถ้า $\boldsymbol{a<b}$ และ $\boldsymbol{b<c}$ แล้ว $\boldsymbol{a<c}$ (สมบัติการถ่ายทอด (transitive property))
   - ถ้า $\boldsymbol{a>b}$ และ $\boldsymbol{b>c}$ แล้ว $\boldsymbol{a>c}$ (สมบัติการถ่ายทอด (transitive property))
   - ถ้า $\boldsymbol{a=b}$ และ $\boldsymbol{b=c}$ แล้ว $\boldsymbol{a=c}$ (สมบัติการถ่ายทอด (transitive property))
   - $\boldsymbol{a=a}$ (สมบัติการสะท้อน (reflexive property))
   - ถ้า $\boldsymbol{a=b}$ แล้ว $\boldsymbol{b=a}$ (สมบัติการสมมาตร (symmetry property))
   - $\boldsymbol{a\times 0=0}$ (ทุกๆ จำนวนเต็มคูณกับศูนย์ แล้วได้ผลลัพธ์เป็นศูนย์)
   - ถ้า $\boldsymbol{a>b}$ และ $\boldsymbol{c=0}$ แล้ว $\boldsymbol{ac=bc}$ หรือ ถ้า $\boldsymbol{a<b}$ และ $\boldsymbol{c=0}$ แล้ว $\boldsymbol{ac=bc}$

- $a+(-a)=0$ เรียก $-a$ ว่า "อินเวอร์สการบวกของ a"
- $a\times\frac{1}{a}=1$ เรียก $\frac{1}{a}$ ว่า "อินเวอร์สการคูณของ a"
- $a+0=a$ เรียก 0 ว่า "เอกลักษณ์การบวกของทุกจำนวนเต็ม"
- $a\times 1=a$ เรียก 1 ว่า "เอกลักษณ์การคูณของทุกจำนวนเต็ม"
- $a+b=b+a$ (สมบัติการสลับที่การบวก (additive commutative property))
- $a\times b=b\times a$ (สมบัติการสลับที่การคูณ (multiplicative commutative property))
- $(a+b)+c=a+(b+c)$ (สมบัติการเปลี่ยนกลุ่มการบวก (additive associative property))
- $(a\times b)\times c=a\times(b\times c)$ (สมบัติการเปลี่ยนกลุ่มการบวก (multiplicative associative property))
- $a\times(b+c)=(a\times b)+(a\times c)$ (สมบัติการกระจาย (distributive property))

15. จำนวนตรงข้ามของ a คือ $-a$

16. $a\times b$ (a cross b) สามารถเขียนให้อยู่ในรูป $a\cdot b$ (a dot b) หรือ ab

17. $a\div b$ สามารถเขียนให้อยู่ในรูป $\frac{a}{b}$ โดยที่ $b\neq 0$

18. $a-b=a+(-b)$ (การลบ คือ การบวกด้วยจำนวนตรงข้าม)

19. **จำนวนตรรกยะ** + **จำนวนตรรกยะ** ได้ผลลัพธ์เป็น **จำนวนตรรกยะ**

20. **จำนวนตรรกยะ** + **จำนวนอตรรกยะ** ได้ผลลัพธ์เป็น **จำนวนอตรรกยะ**

21. **จำนวนอตรรกยะ** + **จำนวนตรรกยะ** ได้ผลลัพธ์เป็น **จำนวนอตรรกยะ**

22. **จำนวนอตรรกยะ** + **จำนวนอตรรกยะ** ได้ผลลัพธ์เป็น **จำนวนตรรกยะ** หรือ **จำนวนอตรรกยะ** ก็ได้

23. **จำนวนตรรกยะ** × **จำนวนตรรกยะ** ได้ผลลัพธ์เป็น **จำนวนตรรกยะ**

24. **จำนวนตรรกยะ** × **จำนวนอตรรกยะ** ได้ผลลัพธ์เป็น **จำนวนอตรรกยะ** โดยที่ จำนวนตรรกยะต้อง $\neq \mathbf{0}$

25. **จำนวนอตรรกยะ** × **จำนวนตรรกยะ** ได้ผลลัพธ์เป็น **จำนวนอตรรกยะ** โดยที่ จำนวนตรรกยะต้อง $\neq \mathbf{0}$

26. **จำนวนอตรรกยะ** × **จำนวนอตรรกยะ** ได้ผลลัพธ์เป็น **จำนวนตรรกยะ** หรือ **จำนวนอตรรกยะ** ก็ได้

27. **จำนวนเต็มบวก** × **จำนวนเต็มบวก** ได้ผลลัพธ์เป็น **จำนวนเต็มบวก**

28. **จำนวนเต็มบวก** × **จำนวนเต็มลบ** ได้ผลลัพธ์เป็น **จำนวนเต็มลบ**

29. **จำนวนเต็มลบ** × **จำนวนเต็มบวก** ได้ผลลัพธ์เป็น **จำนวนเต็มลบ**

30. **จำนวนเต็มลบ** × **จำนวนเต็มลบ** ได้ผลลัพธ์เป็น **จำนวนเต็มบวก**

ตัวอย่าง 1 ค่าของ $3^6 = \underbrace{3\times3\times3\times3\times3\times3}_{6\text{ ตัว}}$

ตัวอย่าง 2 ค่าของ $2^5 = \underbrace{2\times2\times2\times2\times2}_{5\text{ ตัว}}$

ตัวอย่าง 3 ค่าของ $18^{100} = \underbrace{18\times18\times\ldots\times18}_{100\text{ ตัว}}$

ตัวอย่าง 4 ค่าของ $5^{-4} = \frac{1}{5^4} = \underbrace{\frac{1}{5}\times\frac{1}{5}\times\frac{1}{5}\times\frac{1}{5}}_{4\text{ ตัว}}$

ตัวอย่าง 5 ค่าของ $6^{-300} = \frac{1}{6^{300}} = \underbrace{\frac{1}{6}\times\frac{1}{6}\times\ldots\times\frac{1}{6}}_{300\text{ ตัว}}$

ตัวอย่าง 6 ค่าของ $(-7)^6 = \underbrace{(-7)\times(-7)\times(-7)\times(-7)\times(-7)\times(-7)}_{6\text{ ตัว}}$

ตัวอย่าง 7 ค่าของ $(-2)^{-8} = \frac{1}{(-2)^8} = \underbrace{\frac{1}{-2}\times\frac{1}{-2}\times\frac{1}{-2}\times\frac{1}{-2}\times\frac{1}{-2}\times\frac{1}{-2}\times\frac{1}{-2}\times\frac{1}{-2}}_{8\text{ ตัว}}$

ตัวอย่าง 8 ค่าของ $(0.1)^6 = \underbrace{(0.1)\times(0.1)\times(0.1)\times(0.1)\times(0.1)\times(0.1)}_{6\text{ ตัว}}$

ตัวอย่าง 9 ค่าของ $(0.1)^{-6} = \frac{1}{(0.1)^6} = \underbrace{\left(\frac{1}{0.1}\right)\times\left(\frac{1}{0.1}\right)\times\left(\frac{1}{0.1}\right)\times\left(\frac{1}{0.1}\right)\times\left(\frac{1}{0.1}\right)\times\left(\frac{1}{0.1}\right)}_{6\text{ ตัว}}$

ตัวอย่าง 10 ค่าของ $(-0.5)^4 = \underbrace{(-0.5)\times(-0.5)\times(-0.5)\times(-0.5)}_{4\text{ ตัว}}$

ตัวอย่าง 11 ค่าของ $(-0.5)^{-4} = \frac{1}{(-0.5)^4} = \underbrace{\left(\frac{1}{-0.5}\right)\times\left(\frac{1}{-0.5}\right)\times\left(\frac{1}{-0.5}\right)\times\left(\frac{1}{-0.5}\right)}_{4\text{ ตัว}}$

ตัวอย่าง 12 ค่าของ $\left(\frac{4}{7}\right)^5 = \underbrace{\frac{4}{7}\times\frac{4}{7}\times\frac{4}{7}\times\frac{4}{7}\times\frac{4}{7}}_{5\text{ ตัว}}$

ตัวอย่าง 13 ค่าของ $\left(\frac{2}{3}\right)^{-4} = \frac{1}{\left(\frac{2}{3}\right)^4} = \underbrace{\frac{1}{\left(\frac{2}{3}\right)}\times\frac{1}{\left(\frac{2}{3}\right)}\times\frac{1}{\left(\frac{2}{3}\right)}\times\frac{1}{\left(\frac{2}{3}\right)}}_{4\text{ ตัว}} = \underbrace{\frac{3}{2}\times\frac{3}{2}\times\frac{3}{2}\times\frac{3}{2}}_{4\text{ ตัว}}$

นักเรียนควรทราบ 1 สำหรับทุกจำนวนเต็ม a ใดๆ ที่ $b \neq 0$ จะได้ว่า $\frac{-a}{b} = -\frac{a}{b} = \frac{a}{-b}$

นักเรียนควรทราบ 2 สำหรับทุกจำนวนเต็ม a ใดๆ และทุกจำนวนเต็มบวก n พึงระวัง $-a^n = -(a^n)$

เพื่อง่ายต่อการทำความเข้าใจ และกันความสับสน ให้นักเรียนพิจารณาตัวอย่างต่อไปนี้

ตัวอย่าง 14 ค่าของ $-5^7 = -(5^7) = \underbrace{-(5 \times 5 \times 5 \times 5 \times 5 \times 5 \times 5)}_{7 \text{ ตัว}}$

แต่

ตัวอย่าง 15 ค่าของ $(-5)^7 = \underbrace{(-5) \times (-5) \times (-5) \times (-5) \times (-5) \times (-5) \times (-5)}_{7 \text{ ตัว}}$

นักเรียนควรทราบ 3 สำหรับทุกจำนวนเต็ม a, b ใดๆ ที่ $b \neq 0$ จะได้ว่า $\frac{-a}{b} = -\frac{a}{b} = \frac{a}{-b}$

นักเรียนควรทราบ 4 สำหรับทุกจำนวนเต็ม a, b, c, d ใดๆ ที่ $b, c, d \neq 0$ จะได้ว่า $\left(\dfrac{\frac{a}{b}}{\frac{c}{d}}\right) = \frac{a}{b} \times \frac{d}{c} = \frac{a \times d}{b \times c}$

นั่นคือ $\left(\dfrac{\frac{a}{b}}{\frac{c}{d}}\right) = \frac{a}{b} \times \frac{d}{c} = \frac{a \times d}{b \times c}$; **กลับเศษเป็นส่วน เปลี่ยนหารเป็นคูณ ส่วนเป็น 0 ไม่มีความหมาย**

เกร็ดความรู้ 1 พิจารณาผลคูณต่อไปนี้ เมื่อ $x, y \in \mathbb{R}$

1. จาก **ผลต่างกำลังสอง (different square)**, $x^2 - y^2 = (x - y)(x + y)$
   หรือ $(x - y)(x + y) = x^2 - y^2$ และ $\forall x, y \geq 0$
   จะได้ว่า $\left(\sqrt{x} - \sqrt{y}\right)\left(\sqrt{x} + \sqrt{y}\right) = \left(\sqrt{x}\right)^2 - \left(\sqrt{y}\right)^2 = x - y$

2. จาก **ผลต่างกำลังสาม**, $x^3 - y^3 = (x - y)(x^2 + xy + y^2)$ และ $\forall x, y \geq 0$ จะได้ว่า
   $\left(\sqrt{x}\right)^3 - \left(\sqrt{y}\right)^3 = \left(\sqrt{x} - \sqrt{y}\right)\left(\left(\sqrt{x}\right)^2 + \sqrt{xy} + \left(\sqrt{y}\right)^2\right) = \left(\sqrt{x} - \sqrt{y}\right)\left(x + y + \sqrt{xy}\right)$

3. จาก **ผลบวกกำลังสาม**, $x^3+y^3=(x+y)(x^2-xy+y^2)$ และ $\forall x,y\geq 0$ จะได้ว่า

$$\left(\sqrt{x}\right)^3+\left(\sqrt{y}\right)^3=\left(\sqrt{x}+\sqrt{y}\right)\left(\left(\sqrt{x}\right)^2-\sqrt{xy}+\left(\sqrt{y}\right)^2\right)=\left(\sqrt{x}+\sqrt{y}\right)\left(x+y-\sqrt{xy}\right)$$

4. **กำลังสองสมบูรณ์ (perfect square)**, $(x\pm y)^2=x^2\pm 2xy+y^2$ และ $\forall x,y\geq 0$

จะได้ว่า $\left(\sqrt{x}\pm\sqrt{y}\right)^2=\left(\sqrt{x}\right)^2\pm 2\sqrt{x}\sqrt{y}+\left(\sqrt{y}\right)^2=x\pm 2\sqrt{xy}+y=x+y\pm\sqrt{xy}$

5. **กำลังสามสมบูรณ์**, $(x\pm y)^3=x^3\pm 3x^2y+3xy^2\pm y^3$ และ $\forall x,y\geq 0$ จะได้ว่า

$$\begin{aligned}(\sqrt{x}\pm\sqrt{y})^3 &= \left(\sqrt{x}\right)^3\pm 3\left(\sqrt{x}\right)^2\sqrt{y}+3\sqrt{x}\left(\sqrt{y}\right)^2\pm\left(\sqrt{y}\right)^3\\ &= x\sqrt{x}\pm 3x\sqrt{y}+3y\sqrt{x}\pm y\sqrt{y}\\ &= x\sqrt{x}\pm y\sqrt{y}+3y\sqrt{x}\pm 3x\sqrt{y}\\ &= x\sqrt{x}\pm y\sqrt{y}+3\left(y\sqrt{x}\pm x\sqrt{y}\right)\end{aligned}$$

6. **กำลัง n สมบูรณ์**, พิจารณา**สามเหลี่ยมของปาสคาล**(Pascal's Triangle)

$$\begin{array}{ccccccccccc} & & & & & \binom{0}{0} & & & & & \\ & & & & \binom{1}{0} & & \binom{1}{1} & & & & \\ & & & \binom{2}{0} & & \binom{2}{1} & & \binom{2}{2} & & & \\ & & \binom{3}{0} & & \binom{3}{1} & & \binom{3}{2} & & \binom{3}{3} & & \\ & \binom{4}{0} & & \binom{4}{1} & & \binom{4}{2} & & \binom{4}{3} & & \binom{4}{4} & \\ \binom{5}{0} & & \binom{5}{1} & & \binom{5}{2} & & \binom{5}{3} & & \binom{5}{4} & & \binom{5}{5} \end{array}$$

ทฤษฎีบท 1 [ทฤษฎีบทอเนกนาม (Multinomial Theorem)] ถ้า $n,n_1,n_2,\ldots,n_k$ เป็นจำนวนเต็มที่ไม่เป็นลบ

และ $n = n_1 + n_2 + \ldots n_k$ แล้ว $\binom{n}{n_1, n_2 \ldots n_k} = \dfrac{n!}{n_1! n_2! \ldots n_k!}$

อาศัยทฤษฎีบทของ เดอ โพลิแนค เลอจองด์ (De-Polignac Legendre) จะได้ว่า

$$(x_1 + x_2 + \ldots + x_k)^n = \sum_{\substack{n_1+n_2+\ldots+n_k=n \\ n_1,n_2,\ldots,n_k \geq 0}} x_1^{n_1} x_2^{n_2} \ldots x_k^{n_k}$$

เกร็ดความรู้ 2 $k_1 \sqrt[n]{a} + k_2 \sqrt[n]{a} + \ldots + k_m \sqrt[n]{a} = (k_1 + k_2 + \ldots + k_m) \sqrt[n]{a} = \sum_{i=1}^{m} k_i \sqrt[n]{a}$ และ

เกร็ดความรู้ 3 $k_1 \sqrt[n]{a} - k_2 \sqrt[n]{a} - \ldots - k_m \sqrt[n]{a} = (k_1 - k_2 - \ldots - k_m) \sqrt[n]{a}$

ตัวอย่าง 16 จงหาค่าจำนวนเต็มบวก a และ b ที่ทำให้ $\sqrt{5+\sqrt{24}} = \sqrt{a} + \sqrt{b}$

วิธีทำ: ► พิจารณา

$$5 + \sqrt{24} = 3 + 2\sqrt{2 \cdot 3} + 2 = (\sqrt{2} + \sqrt{3})^2$$

ดังนั้น $\sqrt{5 + 2\sqrt{6}} = \sqrt{2} + \sqrt{3}$ ◄

นักเรียนควรทราบ 5 สำหรับทุกจำนวนเต็ม a ใดๆ จะได้ว่า $\frac{a}{0}$ ไม่มีความหมาย

นักเรียนควรทราบ 6 สำหรับทุกจำนวนเต็ม a ใดๆ ที่ $a \neq 0$ จะได้ว่า $\frac{0}{a} = 0$

นักเรียนควรทราบ 7 ค่าของ $x_1^{x_2^{x_3^{\cdot^{\cdot^{\cdot^{x_n}}}}}} = x_1^{\left(x_2^{\left(x_3^{\left(\cdot^{\left(\cdot^{(\cdot^{x_n})}\right)}\right)}\right)}\right)}$ โดยที่แต่ละ $x_i \neq 0, i = 1, 2, 3, \ldots$

เกร็ดความรู้ 4 พึงสังเกตว่า

การคูณ หาร **กรณีที่เหมือนกัน** มีหลักการดังนี้

$$k_1\sqrt[n]{a}\cdot k_2\sqrt[n]{a}\cdot\ldots\cdot k_m\sqrt[n]{a}=\prod_{i=1}^{m}k_i(\sqrt[n]{a})^m=\prod_{i=1}^{m}k_i\sqrt[n]{a^m}$$ และ $$\frac{k_1\sqrt[n]{a}}{k_2\sqrt[n]{a}}=\frac{k_1}{k_2}$$

การคูณ หาร กรณีที่มี**เลขดัชนีเหมือนกันแต่มีตัวที่ถูกถอดกรณฑ์ต่างกัน** มีหลักการดังนี้

$$k_1\sqrt[n]{a}\cdot k_2\sqrt[n]{b}=k_1k_2\cdot\sqrt[n]{ab}$$ และ $$\frac{k_1\sqrt[n]{a}}{k_2\sqrt[n]{b}}=\frac{k_1\sqrt[n]{a}}{k_2\sqrt[n]{b}}=\frac{k_1}{k_2}\sqrt[n]{\frac{a}{b}}$$

$$k_1\sqrt[n]{a_1}\cdot k_2\sqrt[n]{a_2}\cdot\ldots\cdot k_m\sqrt[n]{a_m}=k_1k_2\cdot\ldots\cdot k_m\sqrt[n]{a_1a_2\cdot\ldots\cdot a_m}=\prod_{i=1}^{m}k_i\sqrt[n]{\prod_{j=1}^{m}a_j}$$

การคูณ หาร กรณีที่มี**เลขดัชนีต่างกันแต่มีตัวที่ถูกถอดกรณฑ์เหมือนกัน** มีหลักการดังนี้

$$k_1\sqrt[m]{a}\cdot k_2\sqrt[n]{a}=k_1a^{(\frac{1}{m})}\cdot k_2a^{(\frac{1}{n})}=k_1k_2\cdot\left(a^{(\frac{1}{m})}\cdot a^{(\frac{1}{n})}\right)=k_1k_2a^{(\frac{1}{m}+\frac{1}{n})}$$

$$(k_1\sqrt[(n_1)]{a})(k_2\sqrt[(n_2)]{a})\ldots(k_m\sqrt[(n_m)]{a})=k_1k_2\ldots k_ma^{(\frac{1}{n_1}+\frac{1}{n_2}+\ldots+\frac{1}{n_m})}=\prod_{i=1}^{m}k_i\cdot a^{\left(\sum_{j=1}^{m}\frac{1}{n_j}\right)}$$

และ $$\frac{k_1\sqrt[m]{a}}{k_2\sqrt[n]{a}}=\frac{k_1a^{\frac{1}{m}}}{k_2a^{\frac{1}{n}}}=\frac{k_1}{k_2}\cdot a^{(\frac{1}{m}-\frac{1}{n})}$$

การคูณ หาร กรณีที่มี**เลขดัชนีต่างกันและมีตัวที่ถูกถอดกรณฑ์ต่างกัน** ทำไม่ได้

เกร็ดความรู้ 5 พิจารณาผลคูณต่อไปนี้ เมื่อ $x,y\in\mathbb{R}$

จาก $(x_1+x_2+\ldots+x_n)(y_1+y_2+\ldots+y_n)$

$=(x_1y_1+x_1y_2+\ldots+x_1y_n)+(x_2y_1+x_2y_2+\ldots+x_2y_n)+\ldots+(x_ny_1+x_ny_2+\ldots+x_ny_n)$

$=\sum_{\substack{i,j\\1\le i\le j}}^{n}x_iy_j$

ตัวอย่าง 17 จงทำ $(2+\sqrt{2})(3+\sqrt{3})$ ให้อยู่ในรูปอย่างง่าย

วิธีทำ: ► จากโจทย์ จะได้ว่า

$$= (2+\sqrt{2})(3+\sqrt{3})$$

$$= (2\cdot 3) + (2\cdot\sqrt{3}) + (3\cdot\sqrt{2}) + (\sqrt{2}\cdot\sqrt{3})$$

$$= 6 + 2\sqrt{3} + 3\sqrt{2} + \sqrt{2\cdot 3}$$

$$= 6 + 2\sqrt{3} + 3\sqrt{2} + \sqrt{6}$$

◄

ตัวอย่าง 18 จงทำ $(2\sqrt{8}+3\sqrt{32})(3\sqrt{32}+4\sqrt{75})$ ให้อยู่ในรูปอย่างง่าย

วิธีทำ: ► จากโจทย์ จะได้ว่า

$$= (2\sqrt{8}\cdot 3\sqrt{32}) + (2\sqrt{8}\cdot 4\sqrt{75}) + (3\sqrt{32}\cdot 3\sqrt{32}) + (3\sqrt{32}\cdot 4\sqrt{75})$$

$$= (2\cdot 2\sqrt{2}\cdot 3\cdot 4\sqrt{2}) + (2\cdot 2\sqrt{2}\cdot 4\cdot 5\sqrt{3}) + (3\cdot\sqrt{32})^2 + (3\cdot 4\sqrt{2}\cdot 4\cdot 5\sqrt{3})$$

$$= (2\cdot 2\cdot 3\cdot 4(\sqrt{2})^2) + (2\cdot 2\cdot 4\cdot 5\sqrt{2\cdot 3}) + (9\cdot 32) + (3\cdot 4\cdot 4\cdot 5\sqrt{2\cdot 3})$$

$$= 96 + 80\sqrt{6} + 288 + 240\sqrt{6}$$

$$= (96+288) + (80+240)\sqrt{6}$$

$$= (96+288) + (80+240)\sqrt{6}$$

$$= 384 + (320)\sqrt{6}$$

◄

ตัวอย่าง 19 จงคำนวณหาผลลัพธ์ของ $\sqrt{(1,000,000)(1,000,001)(1,000,002)(1,000,003)+1}$ โดยไม่ใช้เครื่องคำนวณ

วิธีทำ: ► กำหนดให้ $x = 1,000,000 = 10^6$ ซึ่งจะได้ว่า
$(1,000,000)(1,000,001)(1,000,002)(1,000,003) = (1,000,000)(1,000,000+1)(1,000,000+2)(1,000,000+3)$

พิจารณา

$$\begin{aligned}(1,000,000)(1,000,001)(1,000,002)(1,000,003) &= x(x+1)(x+2)(x+3) \\ &= x(x+3)(x+1)(x+2) \\ &= (x^2+3x)(x^2+3x+2)\end{aligned}$$

กำหนดให้ $y = x^2 + 3x$ จะได้ว่า

$$x(x+1)(x+2)(x+3)+1 = (x^2+3x)(x^2+3x+2)+1 = y(y+2)+1 = (y+1)^2$$

ดังนั้น

$$\begin{aligned}\sqrt{x(x+1)(x+2)(x+3)+1} &= y+1 \\ &= x^2+3x+1 \\ &= (10^6)^2 + (3\cdot 10^6)+1 \\ &= 10^{12} + (3\cdot 10^6)+1 \\ &= 1,000,003,000,001\end{aligned}$$

$$\therefore \sqrt{(1,000,000)(1,000,001)(1,000,002)(1,000,003)+1} = 1,000,003,000,001$$

◄

ทฤษฎีบท 2 [อนุกรมเรขาคณิตจำกัด] กำหนดให้ $x \neq 1$ จะได้ว่า $\sum_{k=0}^{n} x^k = 1 + x + x^2 + \cdots + x^n = \frac{1-x^{n+1}}{1-x}$

การพิสูจน์: กำหนดให้

$$S = 1 + x + x^2 + \cdots + x^n$$

ซึ่งจะได้ว่า

$$xS = x + x^2 + x^3 + \cdots + x^{n+1}$$

พิจารณา

$$S - xS = (1+x+x^2+\cdots+x^n)-(x+x^2+x^3+\cdots+x^{n+1}) = 1-x^{n+1} \;=:\; (1-x)S = 1-x^{n+1} \;=:\; S = \frac{1-x^{n+1}}{1-x},$$

จากกำหนด $x \neq 1$ จะได้ว่าทฤษฎีบทเป็นจริง ❑

ตัวอย่าง 20 ถ้า $a^x = 5$ แล้ว a^{5x} มีค่าเป็นเท่าใด

วิธีทำ จาก $a^x = 5$

$$a^{5x} = (a^x)^5$$
$$= 5^5$$

ตัวอย่าง 21 ถ้า $a^{-x} = 7$ แล้ว a^{-4x} มีค่าเป็นเท่าใด

วิธีทำ จาก $a^{-x} = 7$

$$a^{-4x} = (a^{-x})^4$$
$$= 7^4$$

ตัวอย่าง 22 ถ้า $a^x = 3$ แล้ว a^{-3x} มีค่าเป็นเท่าใด

วิธีทำ จาก $a^x = 3$

$$a^{3x} = (a^x)^3$$
$$= 3^3$$
$$= 27$$
$$a^{-3x} = \frac{1}{a^{3x}}$$
$$= \frac{1}{27}$$

ตัวอย่าง 23 ถ้า $a^{-x} = 2$ แล้ว a^{2x} มีค่าเป็นเท่าใด

วิธีทำ จาก $a^{-x} = 2$

$$a^{-2x} = (a^{-x})^2$$
$$= 2^2$$
$$= 4$$
$$a^{2x} = a^{-(-2x)}$$
$$= \frac{1}{a^{-2x}}$$
$$= \frac{1}{4}$$

ตัวอย่าง 24 ถ้า $(27)^{-x} = 8$ แล้ว $(81)^x$ มีค่าเป็นเท่าใด

วิธีทำ จาก $(27)^{-x} = 8$

จะได้ว่า $(3^3)^{-x} = \left(\frac{1}{2}\right)^{-3}$

$$(3^x)^{-3} = \left(\frac{1}{2}\right)^{-3}$$

ดังนั้น $3^x = \frac{1}{2}$

พิจารณา $81 = 3^4$

จะได้ว่า $81^x = (3^4)^x$

$$= (3^x)^4$$
$$= \left(\frac{1}{2}\right)^4$$

ดังนั้น $(81)^x = \frac{1}{16}$

ตัวอย่าง 25 จงหาค่าของ $3^{\frac{1}{4}}\left(1+3^{\frac{1}{2}}+3^{\frac{3}{4}}\right)\left(3^{(-\frac{1}{4})}+3^{\frac{1}{4}}-3^{\frac{1}{2}}\right)$

<u>วิธีทำ</u> $3^{\frac{1}{4}}\left(1+3^{\frac{1}{2}}+3^{\frac{3}{4}}\right)\left(3^{(-\frac{1}{4})}+3^{\frac{1}{4}}-3^{\frac{1}{2}}\right) = \left(1+3^{\frac{1}{2}}+3^{\frac{3}{4}}\right)3^{\frac{1}{4}}\left(3^{(-\frac{1}{4})}+3^{\frac{1}{4}}-3^{\frac{1}{2}}\right)$

$$= \left(1+3^{\frac{1}{2}}+3^{\frac{3}{4}}\right)\left(3^{\frac{1}{4}}\cdot 3^{(-\frac{1}{4})}+3^{\frac{1}{4}}\cdot 3^{\frac{1}{4}}-3^{\frac{1}{4}}\cdot 3^{\frac{1}{2}}\right)$$

$$= \left(1+3^{\frac{1}{2}}+3^{\frac{3}{4}}\right)\left(3^{\left(\frac{1}{4}+(-\frac{1}{4})\right)}+3^{\left(\frac{1}{4}+\frac{1}{4}\right)}-3^{\left(\frac{1}{4}+\frac{1}{2}\right)}\right)$$

$$= \left(1+3^{\frac{1}{2}}+3^{\frac{3}{4}}\right)\left(3^{0}+3^{\frac{2}{4}}-3^{\frac{3}{4}}\right)$$

$$= \left(1+3^{\frac{1}{2}}+3^{\frac{3}{4}}\right)\left(1+3^{\frac{1}{2}}-3^{\frac{3}{4}}\right)$$

$$= \left((1+3^{\frac{1}{2}})+3^{\frac{3}{4}}\right)\left((1+3^{\frac{1}{2}})-3^{\frac{3}{4}}\right)$$

$$= \left(1+3^{\frac{1}{2}}\right)^{2}-\left(3^{\frac{3}{4}}\right)^{2}$$

$$= \left(1^{2}+2\cdot(1)\left(3^{\frac{1}{2}}\right)+\left(3^{\frac{1}{2}}\right)^{2}\right)-\left(3^{\frac{3}{4}}\right)^{2}$$

$$= \left(1+2\cdot 3^{\frac{1}{2}}+3\right)-3^{\frac{3}{2}}$$

$$= 4+2\cdot 3^{\frac{1}{2}}-3^{\left(1+\frac{1}{2}\right)}$$

$$= 4+\left(2\cdot 3^{\frac{1}{2}}-3\cdot 3^{\left(\frac{1}{2}\right)}\right)$$

$$= 4-3^{\frac{1}{2}}$$

$$= 4-\sqrt{3}$$

ตัวอย่าง 26 จงเขียน $\dfrac{(2^4)^3 \times (2^2)^4 \times (0.02)^{-1}}{2^{15} \times 2^6 \times (-1)^5}$ ให้อยู่ในรูปอย่างง่าย

<u>วิธีทำ</u>

$$
\begin{aligned}
\frac{(2^4)^3 \times (2^2)^4 \times (0.02)^{-1}}{2^{15} \times 2^6 \times (-1)^5} &= \frac{2^{(4\times3)} \times 2^{(2\times4)} \times (2 \times 10^{-2})^{-1}}{2^{15} \times 2^6 \times (-1)^5} \\
&= \frac{2^{12} \times 2^8 \times (2 \times 10^{-2})^{-1}}{2^{15} \times 2^6 \times (-1)} \\
&= \frac{2^{12} \times 2^8}{2^{15} \times 2^6 \times (-1) \times (2 \times 10^{-2})^1} \\
&= \frac{2^{12} \times 2^8}{-\left(2^{15} \times 2^6 \times (2 \times 10^{-2})^1\right)} \\
&= -\left(\frac{2^{12} \times 2^8}{2^{15} \times 2^6 \times 2 \times 10^{-2}}\right) \\
&= -\left(\frac{2^{12} \times 2^8}{2^{15} \times 2^6 \times 2^1 \times \frac{1}{10^2}}\right) \\
&= -\left(\frac{2^{12} \times 2^8 \times 10^2}{2^{15} \times 2^6 \times 2^1}\right) \\
&= -\left(\frac{2^{(12+8)} \times 100}{2^{(15+6+1)}}\right) \\
&= -\left(\frac{2^{20} \times 100}{2^{22}}\right) \\
&= -(2^{(20-22)} \times 100) \\
&= -(2^{-2} \times 100) \\
&= -(\frac{1}{4} \times 100) \\
&= -25
\end{aligned}
$$

ตัวอย่าง 27 จงเขียน $\dfrac{a^{-1}+b^{-1}}{a^{-1}\times b^{-1}}$ ห้อยู่ในรูปอย่างง่าย

วิธีทำ
$$\frac{a^{-1}+b^{-1}}{a^{-1}\times b^{-1}} = \frac{\left(\frac{1}{a^1}+\frac{1}{b^1}\right)}{(a\times b)^{-1}}$$
$$= \frac{\left(\frac{b}{ab}+\frac{a}{ab}\right)}{\left(\frac{1}{ab}\right)}$$
$$= \left(\frac{a+b}{\cancel{ab}}\right)\cdot\left(\frac{\cancel{ab}}{1}\right)$$
$$= a+b$$

นักเรียนควรสังเกต $\dfrac{a^m}{a^n} = \begin{cases} a^{m-n} & \text{เมื่อ } m>n \\ a^0=1 & \text{เมื่อ } m=n \\ \frac{1}{a^{n-m}} & \text{เมื่อ } n>m \end{cases}$ โดยที่ $a\neq 0$ และ m,n เป็นจำนวนเต็มบวก

นักเรียนควรทราบ 8 สำหรับ a^n $\begin{cases} (-a)^n = -a\cdot(-a)^{n-1} \\ \quad = -a\cdot a^{n-1} \\ \quad = -a^n & \text{เมื่อ } n \text{ เป็นจำนวนเต็มคี่} \\ a^n = (-a)^n & \text{เมื่อ } n \text{ เป็นจำนวนเต็มคู่} \end{cases}$

ตัวอย่าง 28 พิจารณา $(-4)^2 = (-4)\times(-4) = 4\times 4 = 16 = 4^2$

ตัวอย่าง 29 พิจารณา $(-2)^3 = (-2)\times(-2)^{3-1} = (-2)\times 2^2 = (-2)\times 4 = -2^3 = -8 = -2^3$

นักเรียนควรทราบ 9 สำหรับ $a \neq 0$ จะได้ว่า $\left(\frac{1}{a}\right)^{-n} = a^n$

ตัวอย่าง 30 $\left(\frac{1}{3}\right)^{-4} = \left(-\frac{1}{3}\right)^{-4} = \left(\frac{-1}{3}\right)^{-4} = \left(\frac{1}{-3}\right)^{-4} = (-3)^4 = 3^4$

ตัวอย่าง 31 $\left(-\frac{5}{7}\right)^{-5} = \left(-\frac{7}{5}\right)^{5}$

ตัวอย่าง 32 $\left(-\frac{2x}{5}\right)^{-2} = \left(-\frac{5}{2x}\right)^{2} = \left(\frac{5}{2x}\right)^{2}$ เมื่อ $x \neq 0$

ตัวอย่าง 33 $\left(\frac{4}{9y}\right)^{-3} = \left(\frac{9y}{4}\right)^{3}$ เมื่อ $y \neq 0$

ตัวอย่าง 34 $\left(\frac{2x}{5y}\right)^{-7} = \left(\frac{5y}{2x}\right)^{7}$ เมื่อ $x, y \neq 0$

ตัวอย่าง 35 $\left(\frac{3x}{4y}\right)^{-6} = \left(-\frac{4y}{3x}\right)^{6} = \left(\frac{4y}{3x}\right)^{6}$ เมื่อ $x, y \neq 0$

ตัวอย่าง 36 $\left(\frac{x+y}{x-y}\right)^{-3} = \left(\frac{x-y}{x+y}\right)^{3}$ เมื่อ $x \neq y$

ตัวอย่าง 37 $\left(\frac{x+y}{x-y}\right)^{-2} = \left(-\frac{x-y}{x+y}\right)^{2} = \left(\frac{x-y}{x+y}\right)^{2}$ เมื่อ $x \neq y$

ตัวอย่าง 38 จงเรียงลำดับจำนวนต่อไปนี้ จากค่ามากไปหาค่าน้อย $1{,}000^{1{,}000}$, $100^{10{,}000}$, $10^{100{,}000}$

วิธีทำ

พิจารณา $1{,}000^{1{,}000} = (10^3)^{1{,}000} = 10^{3{,}000}$

$100^{10{,}000} = (10^2)^{10{,}000} = 10^{20{,}000}$

$10^{100{,}000} = 10^{100{,}000}$

นั่นคือ $10^{100{,}000} > 10^{20{,}000} > 10^{3{,}000}$

ดังนั้น เมื่อเรียงจากค่ามากไปหาค่าน้อย จะได้ $10^{100{,}000}$, $100^{10{,}000}$, $1{,}000^{1{,}000}$ ตามลำดับ

ตัวอย่าง 39 จงเรียงลำดับจำนวนต่อไปนี้ จากค่ามากไปหาค่าน้อย 2^{3^4}, 2^{4^3}, 4^{2^3} และ 4^{3^2}

วิธีทำ

พิจารณา $2^{3^4} = 2^{(3^4)} = 2^{(3\times3\times3\times3)} = 2^{81}$

$2^{4^3} = 2^{(4^3)} = 2^{(4\times4\times4)} = 2^{64}$

$4^{2^3} = 4^{(2^3)} = 4^{(2\times2\times2)} = 4^8 = (2^2)^8 = 2^{16}$

$4^{3^2} = 4^{(3\times3)} = 4^9 = (2^2)^9 = 2^{18}$

นั่นคือ $2^{81} > 2^{64} > 2^{18} > 2^{16}$

ดังนั้น เมื่อเรียงจากค่ามากไปหาค่าน้อย จะได้ 2^{3^4}, 2^{4^3}, 4^{3^2} และ 4^{2^3} ตามลำดับ

ตัวอย่าง 40 กำหนด $x = 512$ จงหาค่าของ $x^{\frac{26}{81}}\left[x\left(x(x^{\frac{1}{3}})^{\frac{1}{3}}\right)^{\frac{1}{3}}\right]^{\frac{1}{3}}$

วิธีทำ
$$
\begin{aligned}
x^{\frac{26}{81}}\left[x\left(x(x^{\frac{1}{3}})^{\frac{1}{3}}\right)^{\frac{1}{3}}\right]^{\frac{1}{3}} &= x^{\frac{26}{81}}\left[x\left(x(x^{\frac{1}{9}})\right)^{\frac{1}{3}}\right]^{\frac{1}{3}} \\
&= x^{\frac{26}{81}}\left[x\left(x\cdot x^{\frac{1}{9}}\right)^{\frac{1}{3}}\right]^{\frac{1}{3}} \\
&= x^{\frac{26}{81}}\left[x\left(x^{\frac{10}{9}}\right)^{\frac{1}{3}}\right]^{\frac{1}{3}} \\
&= x^{\frac{26}{81}}\left[x\left(x^{\frac{10}{27}}\right)\right]^{\frac{1}{3}} \\
&= x^{\frac{26}{81}}\left[x\cdot x^{\frac{10}{27}}\right]^{\frac{1}{3}} \\
&= x^{\frac{26}{81}}\left(x^{\frac{37}{27}}\right)^{\frac{1}{3}} \\
&= x^{\frac{26}{81}}\cdot x^{\frac{37}{81}} \\
&= x^{\frac{63}{81}} \\
&= x^{\frac{7}{9}}
\end{aligned}
$$

แทนค่า $x = 512$ จะได้
$$
\begin{aligned}
&= (512)^{\frac{7}{9}} \\
&= (2^9)^{\frac{7}{9}} \\
&= 2^7 \\
&= 128
\end{aligned}
$$

ทฤษฎีบท 3 ให้ $a \in \mathbb{Z}^+$ และ $x, y \in \mathbb{Q}$ ถ้า $a^x = a^y$ แล้ว $x = y$

นักเรียนควรทราบ 10 สำหรับ $a, b \neq 0$ จะได้ว่า $\left(\frac{a}{b}\right)^{-n} = \left(\frac{b}{a}\right)^n$

ตัวอย่าง 41 กำหนด $8^{\frac{x}{2}}=5$ จงหาค่าของ 2^{3x}

วิธีทำ จาก $8^{\frac{x}{2}}=5$ จะได้ $2^{\frac{3x}{2}}=5$

และจาก $2^{3x}=\left(2^{\frac{3x}{2}}\right)^2$

$=5^2$

$=25$

ดังนั้น $2^{3x}=25$

ตัวอย่าง 42 กำหนด $64^{-x}=8$ จงหาค่าของ 2^{4x}

วิธีทำ จาก $64^{-x}=8$ จะได้ $2^{-6x}=2^3$

ดังนั้น $-6x=3$

$x=-\frac{1}{2}$

แทนค่า $x=-\frac{1}{2}$ ใน $2^{4x}=2^{4(-\frac{1}{2})}$

$=2^{-2}$

$=\frac{1}{2^2}$

$=\frac{1}{4}$

ตัวอย่าง 43 กำหนด $(16)^{-x}=128$ จงหาค่าของ $2^{\frac{4x}{7}}$

วิธีทำ จาก $(16)^{-x}=128$ จะได้ $2^{-4x}=2^7$

ดังนั้น $-4x=7$

$x=\frac{-7}{4}$

จะได้ว่า $2^{\frac{4x}{7}}=2^{(\frac{4}{7})\cdot(\frac{-7}{4})}$

$=2^{-1}$

$=\frac{1}{2}$

ดังนั้น $2^{\frac{4x}{7}}=\frac{1}{2}$

ตัวอย่าง 44 กำหนด $(32)^x=243$ จงหาค่าของ 2^{4x}

วิธีทำ จาก $(32)^x=243$ จะได้ $2^{5x}=3^5$

นำ $\frac{4}{5}$ คูณเลขยกกำลังทั้งสองข้าง จะได้ $(2^{5x})^{\frac{4}{5}}=(3^5)^{\frac{4}{5}}$

$2^{4x}=3^4$

$=81$

ดังนั้น $2^{4x}=81$

พิจารณาสูตรผลต่างกำลังสอง(different square); $\forall x,y\in\mathbb{R},\ x^2-y^2=(x-y)(x+y)$
และ $\forall a\in\mathbb{R}-\{0\}, m,n\in\mathbb{Z},\quad (a^m)^n=a^{mn}$

จะได้ว่า $\left(1-x^{\frac{1}{n}}\right)\left(1+x^{\frac{1}{n}}\right)=\left(1^2-x^{(\frac{1}{n})2}\right)$

$=\left(1-x^{\frac{2}{n}}\right)$

นั่นคือ $\left(1-x^{\frac{1}{n}}\right)\left(1+x^{\frac{1}{n}}\right)=\left(1-x^{\frac{2}{n}}\right), x>0, n\in\mathbb{N}$

ตัวอย่าง 45 กำหนด $x=2$ จงหาค่าของ $(1-x^{\frac{1}{8}})(1+x^{\frac{1}{8}})(1+x^{\frac{1}{4}})(1+x^{\frac{1}{2}})(1+x)$

วิธีทำ จากโจทย์จะได้

$$=\left[(1-x^{\frac{1}{8}})(1+x^{\frac{1}{8}})\right](1+x^{\frac{1}{4}})(1+x^{\frac{1}{2}})(1+x)$$

$$=(1-x^{\frac{2}{8}})(1+x^{\frac{1}{4}})(1+x^{\frac{1}{2}})(1+x)$$

$$=\left[(1-x^{\frac{1}{4}})(1+x^{\frac{1}{4}})\right](1+x^{\frac{1}{2}})(1+x)$$

$$=(1-x^{\frac{2}{4}})(1+x^{\frac{1}{2}})(1+x)$$

$$=\left[(1-x^{\frac{1}{2}})(1+x^{\frac{1}{2}})\right](1+x)$$

$$=(1-x^{\frac{2}{2}})(1+x)$$

$$=(1-x)(1+x)$$

$$=(1-x^2)$$

$$=(1-2^2)$$

$$=(1-4)$$

$$=-3$$

ดังนั้น เมื่อ $x=2$ จะได้ว่า $(1-x^{\frac{1}{8}})(1+x^{\frac{1}{8}})(1+x^{\frac{1}{4}})(1+x^{\frac{1}{2}})(1+x)=-3$

พิจารณาต่อไปนี้ ถ้า $a \in \mathbb{R}^+, n \in \mathbb{N}$

จาก $\left(1-a^{\frac{1}{n}}\right)\left(1+a^{\frac{1}{n}}\right)=\left(1-a^{\frac{2}{n}}\right)$

พิจารณา

$$\left(1+a^{\left(\frac{1}{2^0}\right)}\right)\left(1+a^{\left(\frac{1}{2^1}\right)}\right)\left(1+a^{\left(\frac{1}{2^2}\right)}\right)\ldots\left(1+a^{\left(\frac{1}{2^{(n-2)}}\right)}\right)\left(1+a^{\left(\frac{1}{2^{(n-1)}}\right)}\right)\left(1-a^{\left(\frac{1}{2^{(n-1)}}\right)}\right)$$

$$=\left(1+a^{\left(\frac{1}{2^0}\right)}\right)\left(1+a^{\left(\frac{1}{2^1}\right)}\right)\left(1+a^{\left(\frac{1}{2^2}\right)}\right)\ldots\left(1+a^{\left(\frac{1}{2^{(n-2)}}\right)}\right)\left(1-a^{\left(\frac{2}{2^{(n-1)}}\right)}\right)$$

$$=\left(1+a^{\left(\frac{1}{2^0}\right)}\right)\left(1+a^{\left(\frac{1}{2^1}\right)}\right)\left(1+a^{\left(\frac{1}{2^2}\right)}\right)\ldots\left(1+a^{\left(\frac{1}{2^{(n-2)}}\right)}\right)\left(1-a^{\left(\frac{1}{2^{(n-2)}}\right)}\right)$$

$$=\left(1+a^{\left(\frac{1}{2^0}\right)}\right)\left(1+a^{\left(\frac{1}{2^1}\right)}\right)\left(1+a^{\left(\frac{1}{2^2}\right)}\right)\ldots\left(1-a^{\left(\frac{2}{2^{(n-2)}}\right)}\right)$$

$$=\left(1+a^{\left(\frac{1}{2^0}\right)}\right)\left(1+a^{\left(\frac{1}{2^1}\right)}\right)\left(1+a^{\left(\frac{1}{2^2}\right)}\right)\ldots\left(1-a^{\left(\frac{1}{2^{(n-3)}}\right)}\right)$$

$$=\left(1+a^{\left(\frac{1}{2^0}\right)}\right)\left(1+a^{\left(\frac{1}{2^1}\right)}\right)\left(1+a^{\left(\frac{1}{2^2}\right)}\right)\left(1-a^{\left(\frac{1}{2^2}\right)}\right)$$

$$=\left(1+a^{\left(\frac{1}{2^0}\right)}\right)\left(1+a^{\left(\frac{1}{2^1}\right)}\right)\left(1-a^{\left(\frac{2}{2^2}\right)}\right)$$

$$=\left(1+a^{\left(\frac{1}{2^0}\right)}\right)\left(1+a^{\left(\frac{1}{2^1}\right)}\right)\left(1-a^{\left(\frac{1}{2^1}\right)}\right)$$

$$=\left(1+a^{\left(\frac{1}{2^0}\right)}\right)\left(1-a^{\left(\frac{2}{2^1}\right)}\right)$$

$$=\left(1+a^{\left(\frac{1}{2^0}\right)}\right)\left(1-a^{\left(\frac{1}{2^0}\right)}\right)$$

$$=\left(1+a^{\left(\frac{1}{1}\right)}\right)\left(1-a^{\left(\frac{1}{1}\right)}\right)$$

$$=(1+a)(1-a)$$

$$=\left(1-a^2\right)$$

ดังนั้น $\left(1+a^{\left(\frac{1}{2^0}\right)}\right)\left(1+a^{\left(\frac{1}{2^1}\right)}\right)\left(1+a^{\left(\frac{1}{2^2}\right)}\right)\ldots\left(1+a^{\left(\frac{1}{2^{(n-2)}}\right)}\right)\left(1+a^{\left(\frac{1}{2^{(n-1)}}\right)}\right)\left(1-a^{\left(\frac{1}{2^{(n-1)}}\right)}\right)=\left(1-a^2\right)$

ในทำนองเดียวกัน

จะได้ว่า $\left(a^{\left(\frac{1}{2^0}\right)}+1\right)\left(a^{\left(\frac{1}{2^1}\right)}+1\right)\left(a^{\left(\frac{1}{2^2}\right)}+1\right)\ldots\left(a^{\left(\frac{1}{2^{(n-2)}}\right)}+1\right)\left(a^{\left(\frac{1}{2^{(n-1)}}\right)}+1\right)\left(a^{\left(\frac{1}{2^{(n-1)}}\right)}-1\right)=\left(a^2-1\right)$

ตัวอย่าง 46 $(1+7)\left(1+7^{\frac{1}{2}}\right)\left(1+7^{\frac{1}{4}}\right)\ldots\left(1+7^{\frac{1}{128}}\right)\left(1-7^{\frac{1}{128}}\right)=\left(1-7^2\right)=1-49=-48$

ตัวอย่าง 47 $(7+1)\left(7^{\frac{1}{2}}+1\right)\left(7^{\frac{1}{4}}+1\right)\ldots\left(7^{\frac{1}{128}}+1\right)\left(7^{\frac{1}{128}}-1\right)=\left(7^2-1\right)=49-1=48$

เกร็ดความรู้ 6 $\forall m,n\in\mathbb{Z}^+$ ที่ $n>1$ และ $a,b\in\mathbb{R},b\neq 0$ จะได้ว่า

1. $(\sqrt[n]{a})^n=a$ เมื่อ $\sqrt[n]{a}$ เป็นจำนวนจริง
2. $\sqrt[n]{a^n}=\begin{cases} a & \text{เมื่อ } a\geq 0 \\ a & \text{เมื่อ } a<0 \text{ และ } n \text{ เป็นจำนวนคี่บวก} \\ |a| & \text{เมื่อ } a<0 \text{ และ } n \text{ เป็นจำนวนคู่บวก}\end{cases}$
3. $\sqrt[n]{ab}=\sqrt[n]{a}\sqrt[n]{b}$
4. $\sqrt[n]{\frac{a}{b}}=\frac{\sqrt[n]{a}}{\sqrt[n]{b}}$
5. $\sqrt[n]{a}=a^{\frac{1}{n}}$
6. $\sqrt[n]{a^m}=(a^m)^{\frac{1}{n}}=a^{\frac{m}{n}}$
7. $\sqrt[n]{(ab)^m}=\sqrt[n]{a^m b^m}=\sqrt[n]{a^m}\sqrt[n]{b^m}=(a^{\frac{m}{n}})(b^{\frac{m}{n}})=(ab)^{\frac{m}{n}}$
8. $\sqrt[n]{\left(\frac{a}{b}\right)^m}=\frac{\sqrt[n]{a^m}}{\sqrt[n]{b^m}}=\frac{a^{\frac{m}{n}}}{b^{\frac{m}{n}}}=\left(\frac{a}{b}\right)^{\frac{m}{n}}$

นักเรียนควรทราบ 11 สำหรับ $a\in\mathbb{R},n\in\mathbb{Z}$ จะได้ว่า $\sqrt[n]{a}$ เป็น $\begin{cases}\textbf{รากคี่} & \text{เมื่อ } n \text{ เป็นจำนวนเต็มคี่} \\ \textbf{รากคู่} & \text{เมื่อ } n \text{ เป็นจำนวนเต็มคู่}\end{cases}$

- ถ้า $\sqrt[n]{a}$ เป็นรากคี่ แล้ว $a \in \mathbb{R}$ (a เป็นได้ทั้งจำนวนจริงลบ หรือ 0 หรือ จำนวนจริงบวก)
- ถ้า $\sqrt[n]{a}$ เป็นรากคู่ แล้ว $a \in \mathbb{R} - \mathbb{R}^-$ ($a \geq 0$ เท่านั้น และ a ต้องไม่ติดลบ)

นักเรียนควรทราบ 12 สำหรับ $a \in \mathbb{R}$ จะได้ว่า $\sqrt[n]{a^n} = \begin{cases} a & \text{เมื่อ } n \text{ เป็นจำนวนเต็มบวกคี่} \\ |a| & \text{เมื่อ } n \text{ เป็นจำนวนเต็มบวกคู่} \end{cases}$

นักเรียนควรทราบ 13 สำหรับ $a \in \mathbb{R}$ จะได้ว่า $|a| = \begin{cases} a & \text{เมื่อ } a \geq 0 \\ |a| & \text{เมื่อ } a < 0 \end{cases}$

นักเรียนควรทราบ 14 สำหรับ $a, b \in \mathbb{R}$ จะได้ว่า $\sqrt[n]{a+b} \neq \sqrt[n]{a} + \sqrt[n]{b}$ และ $\sqrt[n]{a-b} \neq \sqrt[n]{a} - \sqrt[n]{b}$

นักเรียนควรทราบ 15 สำหรับ $a, b \in \mathbb{R}^+$ จะได้ว่า $\sqrt[\text{คู่}]{a \cdot b} = \sqrt[\text{คู่}]{(-a) \cdot (-b)} = \sqrt[\text{คู่}]{a} \cdot \sqrt[\text{คู่}]{b}$

นักเรียนควรทราบ 16 สำหรับ $a, b \in \mathbb{R}^+$ จะได้ว่า $\sqrt[\text{คู่}]{(-a) \cdot (-b)} \neq \sqrt[\text{คู่}]{-a} \cdot \sqrt[\text{คู่}]{-b}$

$\sqrt{(-3) \cdot (-2)} = \sqrt{6} = \sqrt{2} \cdot \sqrt{3}$ แต่ $\sqrt{(-3) \cdot (-2)} \neq \sqrt{-3} \cdot \sqrt{-2}$
เพราะว่า **ตัวที่ถูกถอดกรณ์ในรากคู่ห้ามติดลบ**

ตัวอย่าง 48 $\sqrt{(-2) \cdot (-4)} \neq \sqrt{-2} \cdot \sqrt{-4}$

ตัวอย่าง 49 $\sqrt[4]{(-3) \cdot (-5)} \neq \sqrt[3]{-3} \cdot \sqrt[3]{-5}$

นักเรียนควรทราบ 17 สำหรับ $a, b \in \mathbb{R}^+$ จะได้ว่า $\sqrt[\text{คี่}]{(-a) \cdot (-b)} = \sqrt[\text{คี่}]{-a} \cdot \sqrt[\text{คี่}]{-b}$

ตัวอย่าง 50 $\sqrt[3]{(-2)\cdot(-4)}=\sqrt[3]{-2}\cdot\sqrt[3]{-4}$

ตัวอย่าง 51 $\sqrt[5]{(-3)\cdot(-4)}=\sqrt[5]{-3}\cdot\sqrt[5]{-4}$

ตัวอย่าง 52 $\sqrt[7]{(-1)\cdot(-2)}=\sqrt[7]{-1}\cdot\sqrt[7]{-2}$

นักเรียนควรทราบ 18 สำหรับ $a,b\in\mathbb{R}$ จะได้ว่า $(a-b)^{\text{คู่}}=(b-a)^{\text{คู่}}$

ตัวอย่าง 53 $(4-2)^2=2^2=4=(-2)^2=(2-4)^2$

ตัวอย่าง 54 $(2-1)^4=1^4=1=(-1)^4=(1-2)^4$

ตัวอย่าง 55 $(x-y)^6=(y-x)^6$

นักเรียนควรทราบ 19 สำหรับ $a,b\in\mathbb{R}$ จะได้ว่า $(a-b)^{\text{คี่}}\neq(b-a)^{\text{คี่}}$

ตัวอย่าง 56 $(4-2)^3=2^3=8\neq-8=(-2)^3=(2-4)^3$

ตัวอย่าง 57 $(2-1)^5=1^5=1\neq-1=(-1)^5=(1-2)^5$

ตัวอย่าง 58 $(x-y)^7\neq(y-x)^7$

นักเรียนควรทราบ 20 สำหรับ $a,b\in\mathbb{R}$ จะได้ว่า $(a-b)^{\text{คี่}}=-(b-a)^{\text{คี่}}$

ตัวอย่าง 59 $(4-2)^3=2^3=8=-(-8)=-(-2)^3=-(2-4)^3$

ตัวอย่าง 60 $(2-1)^5=1^5=1=-(-1)=-(-1)^5=-(1-2)^5$

ตัวอย่าง 61 $(x-y)^7=-(y-x)^7$

นักเรียนควรทราบ 21 สำหรับ $a\in\mathbb{R},m,n\in\mathbb{Z}^+$ จะได้ว่า $(a^m)^n=a^{mn}=a^{nm}=(a^n)^m$

ตัวอย่าง 62 $(2^3)^4=2^{3\times4}=2^{4\times3}=(2^3)^4$

ตัวอย่าง 63 $((-2)^3)^4=(-2)^{3\times4}=(-2)^{4\times3}=((-2)^3)^4$

บทนิยาม 1 สำหรับ $n \in \mathbb{Z}^+$ จะเรียก $\sqrt[n]{\blacksquare}$ ว่า **กรณฑ์ที่ n ของ $\blacksquare$**

- สำหรับ $k \in \mathbb{R}$ ซึ่ง $k\sqrt[n]{\blacksquare}$ เรียก k ว่า **สัมประสิทธิ์**
- เรียก n ว่า **อันดับของกรณฑ์**
- เรียก $\blacksquare$ ว่า **ตัวที่ถูกถอดกรณฑ์**

บทนิยาม 2 **กรณฑ์ที่เหมือนกัน** หมายถึง

1. กรณฑ์ที่มีอันดับของกรณฑ์เป็นอันดับเดียวกัน และ
2. มีจำนวนที่ถูกถอดกรณฑ์เป็นจำนวนเดียวกัน และ
3. มีสัมประสิทธิ์เหมือนหรือต่างกันก็ได้

ตัวอย่าง 64 กรณฑ์อันดับสองที่เหมือนกัน เช่น $2\sqrt{2},\ \sqrt{2},\ -3\sqrt{2},\ \frac{1}{2}\sqrt{2},\ -\frac{2}{3}\sqrt{2},\ 1.34\sqrt{2}$

ตัวอย่าง 65 กรณฑ์อันดับสามที่เหมือนกัน เช่น $2\sqrt[3]{2},\ \sqrt[3]{2},\ -3\sqrt[3]{2},\ \frac{1}{2}\sqrt[3]{2},\ -\frac{2}{3}\sqrt[3]{2},\ 1.34\sqrt[3]{2}$

ตัวอย่าง 66 กรณฑ์ที่ต่างกัน เช่น $\sqrt{4}$ กับ $\sqrt[3]{3}$ เพราะ อันดับของกรณฑ์และตัวที่ถูกถอดกรณฑ์ต่างกัน

ตัวอย่าง 67 กรณฑ์ที่ต่างกัน เช่น $\sqrt{4}$ กับ $\sqrt[3]{4}$ เพราะ อันดับของกรณฑ์ต่างกัน

ตัวอย่าง 68 กรณฑ์ที่ต่างกัน เช่น $\sqrt{4}$ กับ $\sqrt{3}$ เพราะ ตัวที่ถูกถอดกรณฑ์ต่างกัน

เกร็ดความรู้ 7 การบวก ลบ จำนวนที่อยู่ในรูปกรณฑ์ มีหลักพิจารณาดังนี้

1. จำนวนที่อยู่ในรูปกรณฑ์ที่สามารถนำมา **บวก ลบ**กันได้ ต้องเป็น**กรณฑ์ที่เหมือนกัน**เท่านั้น
2. **การบวก ลบ กรณฑ์ที่เหมือนกัน** ทำได้โดย การนำเอา**สัมประสิทธิ์ของกรณฑ์**แต่ละจำนวนมาดำเนินการบวก ลบกันตามปกติ
3. จำนวนที่อยู่ในรูป**กรณฑ์ที่ต่างกัน นำมา บวก ลบกันไม่ได้**

สำหรับการบวก ลบ กรณฑ์ที่เหมือนกัน มีหลักการดังนี้

$$k_1\sqrt[n]{a}+k_2\sqrt[n]{a}=(k_1+k_2)\sqrt[n]{a}$$ และ $$k_1\sqrt[n]{a}-k_2\sqrt[n]{a}=(k_1-k_2)\sqrt[n]{a}$$

เพิ่มเติม 1 $$k_1\sqrt[n]{a}+k_2\sqrt[n]{a}+\ldots+k_m\sqrt[n]{a}=(k_1+k_2+\ldots+k_m)\sqrt[n]{a}=\sum_{i=1}^{m}k_i\sqrt[n]{a}$$ และ

เพิ่มเติม 2 $$k_1\sqrt[n]{a}-k_2\sqrt[n]{a}-\ldots-k_m\sqrt[n]{a}=(k_1-k_2-\ldots-k_m)\sqrt[n]{a}$$

ตัวอย่าง 69 ผลลัพธ์ของ $2\sqrt{3}+\sqrt{3}-4\sqrt{3}=(2+1-4)\sqrt{3}=-\sqrt{3}$

ตัวอย่าง 70 ผลลัพธ์ของ $\frac{2}{4}\sqrt[3]{-5}+\frac{3}{6}\sqrt[3]{-5}-\frac{4}{8}\sqrt[3]{-5}=(\frac{2}{4}+\frac{3}{6}-\frac{4}{8})\sqrt[3]{-5}=\frac{1}{2}\sqrt[3]{-5}$

ตัวอย่าง 71 จงหาผลลัพธ์ของ $\sqrt{75}+\sqrt{48}-\sqrt{27}$

<u>วิธีทำ</u>

$$
\begin{aligned}
\sqrt{75}+\sqrt{48}-\sqrt{27} &= \sqrt{25\times 3}+\sqrt{16\times 3}-\sqrt{9\times 3} \\
&= \sqrt{5^2\times 3}+\sqrt{4^2\times 3}-\sqrt{3^2\times 3} \\
&= 5\sqrt{3}+4\sqrt{3}-2\sqrt{3} \\
&= (5+4-2)\sqrt{3} \\
&= 7\sqrt{3}
\end{aligned}
$$

ตัวอย่าง 72 จงหาผลลัพธ์ของ $(2a+b)\sqrt{2}-(a-2b)\sqrt{2}$

<u>วิธีทำ</u>

$$
\begin{aligned}
(2a+b)\sqrt{2}-(a-2b)\sqrt{2} &= [(2a+b)-(a-2b)]\sqrt{2} \\
&= (2a+b-a+2b)\sqrt{2} \\
&= (a+3b)\sqrt{2}
\end{aligned}
$$

ตัวอย่าง 73 จงหาผลลัพธ์ของ $\frac{x}{\sqrt{5}}-\sqrt{20x}+\frac{2x}{\sqrt{5}}$

<u>วิธีทำ</u>

$$
\begin{aligned}
\frac{x}{\sqrt{5}}-\sqrt{20x}+\frac{2x}{\sqrt{5}} &= \left(\frac{x}{\sqrt{5}}\cdot\frac{\sqrt{5}}{\sqrt{5}}\right)-\sqrt{4\cdot 5}x+\left(\frac{2x}{\sqrt{5}}\cdot\frac{\sqrt{5}}{\sqrt{5}}\right) \\
&= \frac{x\sqrt{5}}{5}-2x\sqrt{5}+\frac{2x\sqrt{5}}{5} \\
&= \left(\frac{x}{5}-2x+\frac{2x}{5}\right)\sqrt{5} \\
&= \left(\frac{x}{5}-\frac{10x}{5}+\frac{2x}{5}\right)\sqrt{5} \\
&= \left(\frac{x-10x+2x}{5}\right)\sqrt{5} \\
&= -\frac{7\sqrt{5}}{5}x
\end{aligned}
$$

ตัวอย่าง 74 จงหาผลลัพธ์ของ $2\sqrt{\frac{1}{10}}-4\sqrt{\frac{5}{2}}+3\sqrt{\frac{2}{5}}+\frac{1}{5}\sqrt{10}$

วิธีทำ
$$\begin{aligned}2\sqrt{\frac{1}{10}}-4\sqrt{\frac{5}{2}}+3\sqrt{\frac{2}{5}}+\frac{1}{5}\sqrt{10} &= 2\sqrt{\frac{1}{10}\cdot\frac{10}{10}}-4\sqrt{\frac{5}{2}\cdot\frac{2}{2}}+3\sqrt{\frac{2}{5}\cdot\frac{5}{5}}+\frac{1}{5}\sqrt{10}\\
&= 2\sqrt{\frac{10}{10^2}}-4\sqrt{\frac{10}{2^2}}+3\sqrt{\frac{10}{5^2}}+\frac{1}{5}\sqrt{10}\\
&= \frac{2}{10}\sqrt{10}-\frac{4}{2}\sqrt{10}+\frac{3}{5}\sqrt{10}+\frac{1}{5}\sqrt{10}\\
&= \left(\frac{2}{10}-\frac{4}{2}+\frac{3}{5}+\frac{1}{5}\right)\sqrt{10}\\
&= \left(\frac{1}{5}-2+\frac{3}{5}+\frac{1}{5}\right)\sqrt{10}\\
&= \left(\frac{1}{5}-\frac{10}{5}+\frac{3}{5}+\frac{1}{5}\right)\sqrt{10}\\
&= \left(\frac{1-10+3+1}{5}\right)\sqrt{10}\\
&= -\frac{5}{5}\sqrt{10}\\
&= -\sqrt{10}\end{aligned}$$

1.2 ตัวอย่างข้อสอบ

โจทย์ 1 จงหาค่าของ $\dfrac{3^{2(3n-1)}\times 3^{3(3-n)}\times 81^{\frac{1-n}{4}}\times 2^{2(m+1)}}{(3^4)^{\frac{n}{2}}\times 3^5\times 2^{2m-1}}$

โจทย์ 2 จงหาค่าของ $\dfrac{(3\times 2^{n+1})-(4\times 2^{n-2})}{2^n-2^{n-1}}$

โจทย์ 3 จงหาค่า 2^{-2x} เมื่อ $2^x=0.25$

โจทย์ 4 จงหาค่า m เมื่อ $64^{m+2}=1$

โจทย์ 5 จงหาค่า k เมื่อ $2^{k+5}-248=2^{2k}$

โจทย์ 6 ข้อใดมีค่ามากที่สุด ถ้า $a=2^{45}$, 3^{36}, $c=4^{27}$, $d=5^{18}$, $e=6^9$

โจทย์ 7 (Onet 25 ก.พ. 49) จงหาค่าของ $(\sqrt{2}+\sqrt{8}+\sqrt{18}+\sqrt{32})^2$

โจทย์ 8 (Onet 25 ก.พ. 49) จงหาค่าของ $\dfrac{\sqrt[5]{-32}}{\sqrt[3]{27}}+\dfrac{2^6}{(64)^{\frac{3}{2}}}$

โจทย์ 9 (Onet 24 ก.พ. 50) จงหาค่าของ $\frac{8^{\frac{2}{3}}}{\sqrt[4]{144}}\cdot\frac{(18)^{\frac{1}{2}}}{\sqrt{6}}$

โจทย์ 10 (Onet 24 ก.พ. 50) จงหาค่าของ $(1-\sqrt{2})^2(2+\sqrt{8})^2(1+\sqrt{2})^3(2-\sqrt{8})^3$

โจทย์ 11 (Onet 24 ก.พ. 50) ถ้า $\left(3+\frac{3}{8}\right)^{3x}=\frac{16}{81}$ จงหาค่าของ x

โจทย์ 12 (B-PAT1 25 ต.ค. 51) ถ้า $6^{x+y}=36$ และ $5^{x+2y}=125$ จงหาค่า x

โจทย์ 13 (B-PAT1 25 ต.ค. 51) ถ้า $xy=2$ จงหาค่า $\frac{2^{(x+y)^2}}{2^{(x-y)^2}}$

โจทย์ 14 (Onet 21 ก.พ. 52) จงหาค่าของ $\sqrt{(-2)^2}+\left(\frac{8^{\frac{1}{2}}+2\sqrt{2}}{\sqrt{32}}\right)$

โจทย์ 15 (PAT 7 มี.ค. 52) ถ้า $4^{y-x}=128$ และ $3^{2y+x}=81$ จงหาค่า y

1.3 ตัวอย่างโจทย์ครูอาหนึ่ง

โจทย์ 16 ถ้า $(125)^{-x}=27$ แล้ว $(25)^x$ มีค่าเป็นเท่าใด

โจทย์ 17 ถ้า $(16)^{-x}=81$ แล้ว 8^{2x} มีค่าเป็นเท่าใด

โจทย์ 18 ถ้า $(32)^{-x}=243$ แล้ว $(16)^x$ มีค่าเป็นเท่าใด

โจทย์ 19 ถ้า $(25)^2=5^x$ แล้ว $2x^2-1$ มีค่าเป็นเท่าใด

โจทย์ 20 ถ้า $(27)^{-x}=\frac{1}{27}$ แล้ว $(4)^x$ มีค่าเป็นเท่าใด

โจทย์ 21 จงหาค่าของ $\left[2^{\frac{1}{4}}\left(1+2^{\frac{1}{2}}+2^{\frac{3}{4}}\right)\left(2^{(-\frac{1}{4})}+2^{\frac{1}{4}}-2^{\frac{1}{2}}\right)\right]^2$

โจทย์ 22 จงหาค่าของ $\sqrt{4^{\frac{1}{4}}\left(1+4^{\frac{1}{2}}+4^{\frac{3}{4}}\right)\left(4^{(-\frac{1}{4})}+4^{\frac{1}{4}}-4^{\frac{1}{2}}\right)}$

โจทย์ 23 จงหาค่าของ $\sqrt[3]{\left[5^{\frac{1}{4}}\left(1+5^{\frac{1}{2}}+5^{\frac{3}{4}}\right)\left(5^{(-\frac{1}{4})}+5^{\frac{1}{4}}-5^{\frac{1}{2}}\right)\right]^{\frac{2}{3}}}$

โจทย์ 24 จงคำนวณหา $\sqrt{(100)(101)(102)(103)+1}$ โดยไม่ใช้เครื่องคำนวณ

โจทย์ 25 จงคำนวณหา $\sqrt{(200)(201)(202)(203)+1}$ โดยไม่ใช้เครื่องคำนวณ

โจทย์ 26 จงคำนวณหา $\sqrt{(503)(502)(501)(500)+1}$ โดยไม่ใช้เครื่องคำนวณ

โจทย์ 27 จงคำนวณหา $\sqrt{(11,503)(11,502)(11,501)(11,500)+1}$ โดยไม่ใช้เครื่องคำนวณ

โจทย์ 28 จงหาค่า x ที่เป็นจำนวนจริง จากสมการ $\sqrt{x+\sqrt{x+\sqrt{x+\sqrt{\ldots}}}}=2$

โจทย์ 29 จงหาค่า x ที่เป็นจำนวนจริง จากสมการ $\dfrac{x+\sqrt{x^2-1}}{x-\sqrt{x^2-1}}+\dfrac{x-\sqrt{x^2-1}}{x+\sqrt{x^2-1}}=98$

โจทย์ 30 จงหาค่า x ที่เป็นจำนวนจริง จากสมการ

$$\cfrac{1}{1+\cfrac{1}{1+\cfrac{1}{\ddots\,1+\cfrac{\vdots}{1+\cfrac{1}{1+\cfrac{1}{x}}}}}}=x$$

โจทย์ 31 จงหาค่า x ที่เป็นจำนวนจริง จากสมการ

$$\sqrt{x+\sqrt{x+11}}+\sqrt{x+\sqrt{x-11}}=4$$

โจทย์ 32 จงหาค่า x ที่เป็นจำนวนจริง จากสมการ

$$\underbrace{\sqrt{x+2\sqrt{x+2\sqrt{x+\cdots+2\sqrt{x+2\sqrt{3x}}}}}}_{n\text{ ราก}}=x$$

โจทย์ 33 จงหาค่า x ที่ทำให้สมการ $2\sqrt{\dfrac{x}{a}}+3\sqrt{\dfrac{a}{x}}=\dfrac{b}{a}+\dfrac{6a}{b}$ เป็นจริง

โจทย์ 34 จงหาค่า x ที่ทำให้สมการ $(x-7)(x-3)(x+5)(x+1)=1680$ เป็นจริง

โจทย์ 35 กำหนด $x=3$ จงหาค่าของ $(1-x^{\frac{1}{8}})(1+x^{\frac{1}{8}})(1+x^{\frac{1}{4}})(1+x^{\frac{1}{2}})(1+x)$

โจทย์ 36 กำหนด $x=4$ จงหาค่าของ $(1-x^{\frac{1}{8}})(1+x^{\frac{1}{8}})(1+x^{\frac{1}{4}})(1+x^{\frac{1}{2}})(1+x)$

โจทย์ 37 กำหนด $x=5$ จงหาค่าของ $(1-x^{\frac{1}{32}})(1+x^{\frac{1}{32}})(1+x^{\frac{1}{16}})(1+x^{\frac{1}{8}})(1+x^{\frac{1}{4}})(1+x^{\frac{1}{2}})(1+x)$

โจทย์ 38 โจทย์ 39 โจทย์ 40 จงหาผลสำเร็จของ $2^{3^{0^{2^{4^{8^{0}}}}}}$ (ครูอาหนึ่ง ชูไวย)

โจทย์ 41 จงหาผลสำเร็จของ $\dfrac{2^{-2}+2^2}{2^2-2^{-2}}$ (ครูอาหนึ่ง ชูไวย)

โจทย์ 42 จงหาผลลัพธ์ของ $\dfrac{(111_2)^2+(102_3)^2}{2\times 101_4}$ (ครูอาหนึ่ง ชูไวย)

โจทย์ 43 จงหาผลลัพธ์ของ $\dfrac{2^3+2^4-2^5}{2^3}$ (ครูอาหนึ่ง ชูไวย)

โจทย์ 44 จงหาผลสำเร็จของ $\left(\frac{(x-y)^3(2x-2y)^{-4}}{(4x-4y)^{-2}}\right)^5$ (ครูอาหนึ่ง ชูไวย)

โจทย์ 45 จงหาค่าของ $\frac{1^{1000x}+1^{2^{100}x}}{1^{5x}+1^{2|x|}}$ โดยที่ x เป็นจำนวนเต็ม (ครูอาหนึ่ง ชูไวย)

โจทย์ 46 ให้ $A=\frac{2^{16}-1}{2^4-1}$ มีจำนวนเฉพาะที่เป็นบวกกี่จำนวนที่หาร A ลงตัว (ครูอาหนึ่ง ชูไวย)

โจทย์ 47 กำหนดให้ $N^5=32768$ และ $M^4=1296$ จะได้ ห.ร.ม. ของ N กับ M มีค่าเท่าใด (ครูอาหนึ่ง ชูไวย)

โจทย์ 48 กำหนดให้ a,b และ c เป็นจำนวนนับ ซึ่ง $a^4<b^4<c^4<700$ จะได้ $\frac{6}{25}\left(\frac{a^2+b^2+c^2}{a+b+c}\right)$ มีค่ามากที่สุดเท่าใด (ครูอาหนึ่ง ชูไวย)

โจทย์ 49 ให้ $s<t<x<y<z<225$ และ $\sqrt{s},\sqrt{t},\sqrt{x},\sqrt{y},\sqrt{z}$ เป็นจำนวนเต็ม แล้ว $\frac{x+y+z-2}{t-s}$ มีค่ามากที่สุดเท่าไร (ครูอาหนึ่ง ชูไวย)

โจทย์ 50 ถ้าผลต่างของกำลังสามของจำนวนนับสองจำนวนที่เรียงติดกัน คือ y เมื่อ y คือจำนวนนับ แล้ว y จะเป็น จำนวนนับใดได้บ้าง (ครูอาหนึ่ง ชูไวย)

โจทย์ 51 ถ้าผลต่างของกำลังสองของจำนวนนับสองจำนวนที่เรียงติดกัน คือ x เมื่อ x คือจำนวนนับ แล้วผลบวกของ x ทุกตัว โดยที่ $x\le 100$ มีค่าเป็นเท่าไร (ครูอาหนึ่ง ชูไวย)

โจทย์ 52 ถ้า s เป็นจำนวนเต็มที่มีค่ามากที่สุดที่หาร x^2-y^2 ลงตัว สำหรับจำนวนคี่บวก x และ y ทุกตัว โดยที่ $x>y$ แล้ว จงหาค่าของ $\frac{3s+4}{4}$(ครูอาหนึ่ง ชูไวย)

โจทย์ 53 ให้ $s<t<x<y<z<1000$ และ $\sqrt[3]{s},\sqrt[3]{t},\sqrt[3]{x},\sqrt[3]{y},\sqrt[3]{z}$ เป็นจำนวนเต็ม แล้ว $2(x+y)s-3tz$ มีค่ามากที่สุดเท่าไร (ครูอาหนึ่ง ชูไวย)

โจทย์ 54 จงหา $\sqrt{(1{,}000{,}000{,}000{,}001)(1{,}000{,}000{,}000{,}002)(1{,}000{,}000{,}000{,}003)(1{,}000{,}000{,}000{,}004)+1}$ โดยไม่ใช้เครื่องคำนวณ (ครูอาหนึ่ง ชูไวย)

โจทย์ 55 จงหาค่าของ $\frac{\left(\sqrt[4]{\left[2^{\frac{1}{4}}\left(1+2^{\frac{1}{2}}+2^{\frac{3}{4}}\right)\left(2^{(-\frac{1}{4})}+2^{\frac{1}{4}}-2^{\frac{1}{2}}\right)\right]^2}\right)^{\frac{2}{3}}}{2}$ (ครูอาหนึ่ง ชูไวย)

โจทย์ 56 จงหาค่า $\sqrt{x}$ โดยที่ x เป็นจำนวนจริง จากสมการ $\sqrt{x+\sqrt{x+13}}+\sqrt{x+\sqrt{x-13}}=5$ (ครูอาหนึ่ง ชูไวย)

โจทย์ 57 จงประมาณค่าของ $\sqrt[4]{\left(\frac{\sqrt{116}}{\sqrt{53}}+\sqrt{111}\right)^5}$ โดยไม่ใช้เครื่องคำนวณ (ครูอาหนึ่ง ชูไวย)

โจทย์ 58 จงหาค่า x ที่ทำให้สมการ $\sqrt[4]{2\sqrt{\frac{x}{a}}+3\sqrt{\frac{a}{x}}}=\left(\frac{b}{a}+\frac{6a}{b}\right)^{\frac{1}{4}}$ เป็นจริง (ครูอาหนึ่ง ชูไวย)

โจทย์ 59 จงหาค่า $\sqrt{2x}$ ที่เป็นจำนวนจริง จากสมการ

$$\underbrace{\sqrt{x+2\sqrt{x+2\sqrt{x+\cdots+2\sqrt{x+2\sqrt{3x}}}}}}_{n \text{ ราก}}=x$$

(ครูอาหนึ่ง ชูไวย)

โจทย์ 60 จงหาค่า $(5x-1)^{\frac{3}{5}}$ ที่เป็นจำนวนจริง จากสมการ

$$\cfrac{1}{1+\cfrac{1}{1+\cfrac{1}{\ddots\,1+\cfrac{1}{1+\cfrac{1}{x}}}}}=x$$

(ครูอาหนึ่ง ชูไวย)

โจทย์ 61 สำหรับทุก $n\in\mathbb{Z}^+$ จงหาค่า $\sqrt{\left(\sqrt[n]{a+b}\right)^{2n}}$ เมื่อ a และ b เป็นจำนวนเต็มบวก ที่ทำให้ $\sqrt{12-2\sqrt{21}}=\sqrt{a}+\sqrt{b}$ (ครูอาหนึ่ง ชูไวย)

โจทย์ 62 ถ้า $(\frac{1}{9})^{-x}=4$ แล้ว $\sqrt{\dfrac{\sqrt[3]{\left(\dfrac{(81)^x}{\sqrt[3]{(27)^x}}\right)}}{2}}$ มีค่าเป็นเท่าใด (ครูอาหนึ่ง ชูไวย)

> "วจีถาม มือลิขิต จิตรู้ ตาดู หูฟัง กายปฏิบัติ
> รอบรู้ คือ ถึงแก่นปรมัตถ์ รู้แจ้ง แจ่มชัด แตกฉาน
> รอบคอบ คือ รู้ตรวจผิด-ตรองถูก รู้เหตุ รู้ผล รู้ตน รู้ประมาณ
> รอบด้าน คือ รู้การณ์ (กาล, กาลเทศะ) รู้ชุมชน รู้บุคคล" -ครูอาหนึ่ง ชูไวย

เกร็ดความรู้ 8

$$e=1+\frac{1}{1!}+\frac{1}{2!}+\frac{1}{3!}+\frac{1}{4!}+\ldots$$

เกร็ดความรู้ 9

$$\frac{\pi}{2}=\frac{2}{1}\times\frac{2}{3}\times\frac{4}{3}\times\frac{4}{5}\times\frac{6}{5}\times\cdots$$

เกร็ดความรู้ 10

$$\frac{1}{2}=\cfrac{1}{\cfrac{1}{\frac{1}{\ldots}+1+\frac{1}{\ldots}}+1+\cfrac{1}{\frac{1}{\ldots}+1+\frac{1}{\ldots}}}$$

เกร็ดความรู้ 11

$$e-1=1+\cfrac{2}{2+\cfrac{3}{3+\cfrac{4}{4+\cfrac{5}{5+\ldots}}}}$$

เกร็ดความรู้ 12

$$\frac{4}{\pi}=1+\cfrac{1}{2+\cfrac{3^2}{2+\cfrac{5^2}{2+\cfrac{7^2}{2+\ldots}}}}$$

2 ทฤษฎีจำนวนเบื้องต้น

2.1 การหารลงตัว

2.1.1 ขั้นตอนวิธีการหาร

ทฤษฎีบท 4 **ขั้นตอนวิธีการหาร** (Division Algolithm) ให้ a และ b เป็นจำนวนเต็ม โดยที่ $b > 0$ จะมีจำนวนเต็ม q และ r เพียงชุดเดียวที่ทำให้

$$a = bq + r \quad \text{โดยที่} \quad 0 \le r < b$$

เราเรียกจำนวนเต็ม a ว่า **ตัวตั้ง** (Dividend), เรียก b ว่า **ตัวหาร** (Divisor), เรียก q ว่า **ผลหาร** (Quotient) และเรียก r ว่า **เศษเหลือ** (Remainder) จากการหาร a ด้วย b

การพิสูจน์: ในตอนแรกเราจะพิสูจน์ว่า $\exists q, r \in \mathbb{Z}$ ที่สอดคล้องกับสมการ $a = bq + r$

ให้ $S = \{a - bx \mid x \text{ เป็นจำนวนเต็ม และ } a - bx \ge 0\}$

เนื่องจาก $b \ge 1$ ดังนั้น $b|a| \ge |a|$ นั่นคือ

$$a - b(-|a|) = a + b|a| \ge a + |a| \ge 0$$

เพราะฉะนั้น $S \ne \varnothing$ (เลือก $x = -|a|$) โดยหลักการจัดอันดับอย่างดีสำหรับ S จะได้ว่า S มีสมาชิกค่าน้อยสุด ให้ r เป็นสมาชิกค่าน้อยสุดใน S ดังนั้น จะมีจำนวนเต็ม q ที่ทำให้ $r = a - bq$ และ $r \ge 0$ นั่นคือ $a = bq + r$ ต่อไปเราจะแสดงว่า $r < b$ สมมติว่าไม่จริง นั่นคือ $r \ge b$ ดังนั้น

$$a - b(q+1) = (a - bq) - b = r - b \ge 0$$

ซึ่งแสดงว่า $a - b(q+1) \in S$ แต่ $a - b(q+1) = r - b < r$ ทำให้เกิดข้อขัดแย้งกับ r ที่เป็นสมาชิกค่าน้อยที่สุดใน S ดังนั้นเราสรุปได้ว่า $r < b$ ต่อไปเราจะแสดงว่ามีจำนวนเต็ม q และ r เช่นนี้ได้เพียงชุดเดียวเท่านั้น ให้ q_1, q_2, r_1 และ r_2 เป็นจำนวนเต็มที่ทำให้ $a = bq_1 + r_1$ โดยที่ $0 \le r_1 < b$ และ $a = bq_2 + r_2$ โดยที่ $0 \le r_2 < b$ จะแสดงว่า $r_1 = r_2$ สมมติว่า $r_1 \ne r_2$ ดังนั้น $|r_2 - r_1| \ge 1$ จาก $r_2 - r_1 = b(q_1 - q_2)$ จะได้ว่า $b \mid (r_2 - r_1)$ โดยทฤษฎีบท 4 จะได้ว่า $|b| \le |r_2 - r_1|$ เนื่องจาก $0 \le r_1 < b$ และ $0 \le r_2 < b$ จะได้ว่า $-b < r_2 - r_1 < b$ นั่นคือ $|r_2 - r_1| < |b|$ ซึ่งขัดแย้งกับอสมการในข้างต้น เราจึงสรุปได้ว่า $r_1 = r_2$ เนื่องจาก $r_1 = r_2$ และ $b \ne 0$ ทำให้ได้ว่า $q_1 = q_2$ ❑

2.1.2 นิยามการหารลงตัว

บทนิยาม 3 ถ้า a และ b เป็นจำนวนเต็มโดยที่ $a \ne 0$ เราจะเรียก a ว่า **ตัวหาร** (Divisor) หรือ **ตัวประกอบ** (Factor) ตัวหนึ่งของ b ก็ต่อเมื่อ มีจำนวนเต็ม q ที่ทำให้ $b = aq$ สัญลักษณ์ $a|b$ แทน a หาร b ลงตัว และ $a \nmid b$ แทน a หาร b ไม่ลงตัว

2.1.3 สมบัติของการหารลงตัว

ทฤษฎีบท 5 ให้ a, b, c และ d เป็นจำนวนเต็ม จะได้ว่า

1.) $a|0, a|a$ โดยที่ $a \neq 0$

2.) $1|a$

3.) $a|1$ ก็ต่อเมื่อ $a = \pm 1$

4.) ถ้า $a|b$ แล้ว $a|bc$

5.) ถ้า $a|b$ แล้ว $ac|bc$

6.) ถ้า $a|b$ และ $b|c$ แล้ว $a|c$

7.) ถ้า $a|b$ และ $c|d$ แล้ว $ac|bd$

8.) ถ้า $a|(b+c)$ และ $a|b$ แล้ว $a|c$

9.) ถ้า $a|b$ และ $b|a$ ก็ต่อเมื่อ $a = \pm b$

10.) ถ้า $a|b$ และ $b \neq 0$ แล้ว $|a| \leq |b|$

11.) ถ้า $a|b$ และ $a|c$ แล้ว $a|(bx+cy)$ สำหรับทุกจำนวนเต็ม x, y

บทแทรก 1 สำหรับทุกจำนวนเต็ม $a, b_1, b_2, ..., b_n$ จะได้ว่า ถ้า $a|b_1$, $a|b_2, ..., a|b_n$ แล้ว $a|(bx_1 + bx_2 + ... + bx_n)$ เมื่อ $x_1, x_2, ..., x_n$ เป็นจำนวนเต็มใดๆ

บทแทรก 2 ให้ a และ b เป็นจำนวนเต็มโดยที่ $b \neq 0$ จะมีจำนวนเต็ม q และ r เพียงชุดเดียวที่ทำให้ $a = bq + r$ โดยที่ $0 \leq r < |b|$

การพิสูจน์: ให้ a และ b เป็นจำนวนเต็มโดยที่ $b \neq 0$ สมมติว่า $b < 0$ ดังนั้น $|b| > 0$ โดยทฤษฎีบท 4 จะมีจำนวนเต็ม q' และ r เพียงชุดเดียวที่ทำให้ $a = |b|q' + r$ โดยที่ $0 \leq r < |b|$ เนื่องจาก $b < 0$ ดังนั้น $|b| = -b$ เราเลือก $q = -q'$ จะได้ว่า $a = bq + r$ โดยที่ $0 \leq r < |b|$ ❑

บทตั้ง 1 กำลังสองของจำนวนคี่ จะอยู่ในแบบ $8k+1$ เมื่อ k เป็นจำนวนเต็ม

การพิสูจน์: ให้ a เป็นจำนวนเต็มคี่ โดยทฤษฎีบทขั้นตอนวิธีการหาร จะมีจำนวนเต็ม q และ r ที่ทำให้ $a = 4q + r$ โดยที่ $0 \leq r < 4$ เนื่องจาก a เป็นจำนวนเต็มคี่ ดังนั้น $r = 1$ หรือ $r = 3$ เท่านั้น
กรณีที่ 1 $r = 1$ ดังนั้น $a = 4q + 1$ จะได้ว่า

$$a^2 = (4q+1)^2 = 8(2q^2 + 2q) + 1$$

กรณีที่ 2 $r = 3$ ดังนั้น $a = 4q + 3$ จะได้ว่า

$$a^2 = (4q+3)^2 = 8(2q^2 + 3q + 1) + 1$$

จากทั้งสองกรณีจะได้ว่า a^2 จะอยู่ในรูปแบบ $8k+1$ เมื่อ k เป็นจำนวนเต็ม ❑

2.2 ตัวหารร่วมมาก

2.2.1 นิยามของตัวหารร่วมมาก

บทนิยาม 4 (ให้ a,b เป็นจำนวนเต็ม ซึ่ง $a \neq 0$ หรือ $b \neq 0$ เราจะเรียกจำนวนเต็มบวก d ว่า **ตัวหารร่วมมาก** (Greatest Common Divisor) ของ a และ b เขียนแทนด้วย $gcd(a,b)$ ก็ต่อเมื่อ d มีคุณสมบัติดังนี้

1.) $d|a$ และ $d|b$

2.) ถ้า $c|a$ และ $c|b$ แล้ว $c \leq d$

2.2.2 ทฤษฎีเกี่ยวกับตัวหารร่วมมาก

ทฤษฎีบท 6 ให้ $a,b \in \mathbb{Z}$ โดยที่ $a \neq 0$ หรือ $b \neq 0$ จะได้ว่า มี $x,y \in \mathbb{Z}$ ที่ทำให้ $gcd(a,b) = ax + by$

บทแทรก 3 (ให้ $a,b \in \mathbb{Z}$ โดยที่ $a \neq 0$ หรือ $b \neq 0$ จะได้ว่า สำหรับ $c \in \mathbb{Z}$ ใดๆ ถ้า $c|a$ และ $c|b$ แล้ว $c|gcd(a,b)$

ทฤษฎีบท 7 ให้ $a,b \in \mathbb{Z}$ ซึ่ง $a \neq 0$ หรือ $b \neq 0$ จะได้ว่า $gcd(a,b) = 1$ ก็ต่อเมื่อ มี $x,y \in \mathbb{Z}$ ที่ทำให้ $1 = ax + by$

ทฤษฎีบท 8 ให้ $a,b \in \mathbb{Z}$ ซึ่ง $a \neq 0$ หรือ $b \neq 0$ และ $m \in \mathbb{Z}^+$ จะได้ว่า $gcd(ma,mb) = m.gcd(a,b)$

ทฤษฎีบท 9 ถ้า $a,b \in \mathbb{Z}$ โดยที่ $d = gcd(a,b)$ แล้ว $gcd(\frac{a}{d},\frac{b}{f})$ ดังนั้นจะได้ว่า $gcd(\frac{a}{d},\frac{b}{f}) = 1$

ทฤษฎีบท 10 ให้ $a,b \in \mathbb{Z}$ ซึ่ง $a \neq 0$ หรือ $b \neq 0$ และ $x \in \mathbb{Z}$ จะได้ว่า $gcd(a,b) = gcd(a+bx,b) = gcd(a,b+ax)$

ทฤษฎีบท 11 ให้ $a,b,m \in \mathbb{Z}$ จะได้ว่า

1.) ถ้า $gcd(a,m) = gcd(b,m) = 1$ แล้ว $gcd(ab,m) = 1$

2.) ถ้า $gcd(a,m) = 1$ และ $a|b$ แล้ว $gcd(a,m) = 1$

3.) ถ้า $a|bc$ และ $gcd(a,b) = 1$ แล้ว $a|c$

4.) ถ้า $a|c$ และ $b|c$ โดยที่ $gcd(a,b) = 1$ แล้ว $ab|c$

ทฤษฎีบท 12 ให้ $a,b,q,r \in \mathbb{Z}$ และ $b = aq + r,\ 0 \leq r < a$ จะได้ว่า $gcd(a,b) = gcd(a,r)$

บทนิยาม 5 ให้ $a_1,a_2,...,a_n \in \mathbb{Z}$ ซึ่ง $a_i \neq 0 ; \exists i = 1,2,...,n$ เราจะเรียก $d \in \mathbb{Z}$ ว่า **ตัวหารร่วม** (Common (Divisor)ของ $a_1,a_2,...,a_n$ ก็ต่อเมื่อ $d|a_i$ และเรียก d ว่า **ตัวหารร่วมมาก** (Greastest Common Divisor) ก็ต่อเมื่อ d เป็นตัวหารร่วมที่มีค่ามาก ที่สุด ซึ่งเขียนแทนด้วย $d = gcd(a_1,a_2,...,a_n)$

บทนิยาม 6 ถ้า $a,b \in \mathbb{Z}$ โดยที่ $a \neq 0$ หรือ $b \neq 0$ จะกล่าวว่า a และ b เป็น **จำนวนเฉพาะสัมพัทธ์** (Relatively Prime) ก็ต่อเมื่อ $gcd(a,b) = 1$

ทฤษฎีบท 13 ให้ $a,b\in\mathbb{Z}$ โดยที่ $a\neq 0$ หรือ $b\neq 0$ ถ้า $d=gcd(a,b)$ แล้วจะได้ว่า $\frac{a}{d}$ และ $\frac{b}{d}$ เป็นจำนวนเฉพาะสัมพัทธ์ นั่นคือ $gcd(\frac{a}{d},\frac{b}{d})=1$

การพิสูจน์: ให้ $d=gcd(a,b)$ จะได้ว่า d เป็นตัวหารของ a และ b ดังนั้น $\frac{a}{d}$ และ $\frac{b}{d}$ เป็นจำนวนเต็ม ให้ $e\in\mathbb{Z}$ ซึ่ง $e\mid\frac{a}{d}$ และ $e\mid\frac{b}{d}$ ดังนั้น จะมีจำนวนเต็ม k และ l ที่ทำให้ $\frac{a}{d}=ke$ และ $\frac{b}{d}=le$ นั่นคือ $a=dek$ และ $b=dle$ จะได้ว่า de เป็นตัวหารร่วมของ a และ b เนื่องจาก d เป็นตัวหารร่วมมากของ a และ b ดังนั้น $de\leq d$ จะได้ว่า $e=1$ ดังนั้น $gcd(\frac{a}{d},\frac{b}{d})=1$ ❑

2.3 ขั้นตอนวิธีการแบบยุคลิด

ทฤษฎีบท 14 ขั้นตอนวิธีการแบบยุคลิด (Euclidean Algorithm)
ให้ $a,b\in\mathbb{Z}$ และ $a>0$ จะได้ว่า มี $q_1,q_2,q_3,\ldots,q_{n-1},q_n$ และ $r_1,r_2,\ldots,r_n$ ที่ทำให้

$$
\begin{array}{rcll}
b &=& aq_1+r_1 & ;0\leq r_1<a \\
a &=& r_1q_2+r_2 & ;0\leq r_2<r_1 \\
r_1 &=& r_2q_3+r_3 & ;0\leq r_3<r_2 \\
 &\vdots& & \\
r_{n-2} &=& r_{n-1}q_n+r_{n-2} & ;0\leq r_{n-2}<r_{n-1} \\
r_{n-1} &=& r_nq_{n+1} &
\end{array}
$$

ซึ่งจะได้ว่า $gcd(a,b)=gcd(a,r_n)=r_n$

ทฤษฎีบท 15 ให้ $a,b,c\in\mathbb{Z}$ โดยที่ $a\neq 0$ และ $b\neq 0$ ให้ $d=gcd(a,b)$ พิจารณาสมการ $ax+by=c$ จะได้ว่า

1.) ถ้า $d\nmid c$ แล้ว สมการ $ax+by=c$ ไม่มีผลเฉลยที่เป็นจำนวนเต็ม

2.) ถ้า $d\mid c$ แล้ว สมการ $ax+by=c$ มีผลเฉลยที่เป็นจำนวนเต็มอยู่เป็นจำนวนอนันต์

และถ้า $x=x_1,\ y=y_1$ เป็นผลเฉลยชุดหนึ่งของสมการ $ax+by=c$ แล้ว จะได้ว่า ผลเฉลยทั้งหมดของสมการ $ax+by=c$ จะเป็น $x=x_1+k(\frac{b}{d})$ และ $y=y_1+k(\frac{a}{d})$ เมื่อ k เป็นจำนวนเต็มใดๆ

2.4 จำนวนเฉพาะ

2.4.1 นิยามของจำนวนเฉพาะ

บทนิยาม 7 เราจะเรียกจำนวนเต็ม p ว่า **จำนวนเฉพาะ** (Prime Number) ก็ต่อเมื่อ $p\neq\pm 1$ และ ถ้า $a,b\in\mathbb{Z}$ โดยที่ $p=ab$ แล้ว $a=\pm 1$ หรือ $b=\pm 1$

เกร็ดความรู้ 13 จำนวนที่ไม่ใช่จำนวนเฉพาะ เราจะเรียกจำนวนนั้นว่า **จำนวนประกอบ** (Composite Numbers)

ทฤษฎีบทที่เกี่ยวกับจำนวนเฉพาะ

ทฤษฎีบท 16 $\forall n \in \mathbb{Z}$ โดยที่ $n > 1$, $\exists p$ ซึ่ง $p \mid n$

ทฤษฎีบท 17 ให้ $a, b \in \mathbb{Z}$ และ p เป็นจำนวนเฉพาะ จะได้ว่า ถ้า $p \mid ab$ แล้ว $p \mid a$ หรือ $p \mid b$

บทแทรก 4 ให้ $a_1, a_2, \ldots, a_n \in \mathbb{Z}$ และ p เป็นจำนวนเฉพาะ จะได้ว่า ถ้า $p \mid a_1 a_2 \ldots a_n$ แล้ว $p \mid a_i$ โดยที่ $1 \le i \le n$

ทฤษฎีบท 18 (**ยูคลิด**) มีจำนวนเฉพาะอยู่เป็นจำนวนอนันต์

ทฤษฎีบท 19 (**ตะแกรงเอราโตสเทเนส**) ถ้า a เป็นจำนวนประกอบ แล้ว จะมีจำนวนเฉพาะ $p \le \sqrt{a}$ ที่ $p \mid a$

ทฤษฎีบท 20 สำหรับจำนวนเต็มบวก n ใดๆ จะมีจำนวนประกอบเรียงกันอย่างน้อย n ตัวเสมอ

ทฤษฎีบท 21 (**ทฤษฎีบทหลักมูลของเลขคณิต**) ทุกๆจำนวนเต็ม $n > 1$ จะเป็นผลคูณ ของจำนวนเฉพาะได้เพียงแบบเดียวเท่านั้น

ทฤษฎีบท 22 ผลคูณของจำนวนเต็มที่อยู่ในรูป $4k+1$ ตั้งแต่สองจำนวนขึ้นไปจะเป็น จำนวนเต็มที่อยู่ในรูป $4k+1$

ทฤษฎีบท 23 มีจำนวนเฉพาะที่อยู่ในรูป $4k+3$ อยู่เป็นจำนวนอนันต์

2.5 สมภาค

2.5.1 นิยามและความหมายของสมภาค

บทนิยาม 8 ให้ a, b และ $m \in \mathbb{Z}$ โดยที่ $m > 0$ จะกล่าวว่า a **สมภาค** (Congruence) กับ b มอดุโล m ก็ต่อเมื่อ $m \mid (a-b)$ เขียนแทนด้วยสัญลักษณ์ $a \equiv b (mod\ m)$ และเรียกจำนวนเต็ม m ว่า **มอดุลัสของสมภาค** (Modulus of Congruence) และถ้า $m \nmid (a-b)$ แล้วจะเรียกว่า a **ไม่สมภาค** (Not Congruence) กับ b มอดุโล m และเขียน แทนด้วย $a \not\equiv b (mod\ m)$

เกร็ดความรู้ 14 ให้ a, b และ m เป็นจำนวนเต็มโดยที่ $m > 0$ จะได้ว่า $a \equiv b (mod\ m)$ ก็ต่อเมื่อ $\exists k \in \mathbb{Z}$ ที่ทำให้ $a = b + km$

2.5.2 สมบัติของสมภาค

ทฤษฎีบท 24 ให้ a, b และ $m \in \mathbb{Z}$ $m > 0$ จะได้ว่า $a \equiv b (mod\ m)$ ก็ต่อเมื่อ เศษที่เหลือจากการหาร (Remainder) ของ a และ b ด้วย m มีค่าเท่ากัน

การพิสูจน์: โดยทฤษฎีบทขั้นตอนการหาร $\exists q_1, q_2, r_1$ และ $r_2 \in \mathbb{Z}$ ที่ทำให้ $a = q_1 m + r_1$ และ $b = q_2 m + r_2$ โดยที่ $0 \le r_1, r_2 < m-1$ สมมติว่า $a \equiv b (mod\ m)$ ดังนั้น

$$m \mid (a-b) = (q_1 - q_2)m + (r_1 - r_2)$$

จะได้ว่า $m \mid (r_1 - r_2)$ ดังนั้น $m \le |r_1 - r_2|$ เนื่องจาก $0 \le r_1, r_2 < m-1$ ดังนั้น $|r_1 - r_2| < m$ สมมติว่า $r_1 = r_2$ ดังนั้น $a - b = (q_1 - q_2)m$ จะได้ว่า $m \mid (a-b)$ ดังนั้น $a \equiv b (mod\ m)$ ❑

ทฤษฎีบท 25 สำหรับจำนวนเต็ม a และ b ใดๆ $a \equiv b(mod\ \ n)$ ก็ต่อเมื่อ a และ b มีเศษที่เหลือจากการหารด้วย n เท่ากัน

ทฤษฎีบท 26 ให้ $n \in \mathbb{Z}^+$ และ $\forall a, b, c, d \in \mathbb{Z}$ จะได้ว่า

1.) $a \equiv a(mod\ \ n)$

2.) ถ้า $a \equiv b(mod\ \ n)$ แล้ว $b \equiv a(mod\ \ n)$

3.) ถ้า $a \equiv b(mod\ \ n)$ และ $b \equiv c(mod\ \ n)$ แล้ว $a \equiv c(mod\ \ n)$

4.) ถ้า $a \equiv b(mod\ \ n)$ แล้ว $a^k \equiv b^k(mod\ \ n)$, $\forall k \in \mathbb{Z}$

5.) ถ้า $a \equiv b(mod\ \ n)$ แล้ว $ca \equiv cb(mod\ \ |c|n)$ เมื่อ $c \in \mathbb{Z} \setminus \{0\}$

6.) ถ้า $a \equiv b(mod\ \ n)$ และ $c \equiv d(mod\ \ n)$ แล้ว $a + c \equiv b + d(mod\ \ n)$

7.) ถ้า $a \equiv b(mod\ \ n)$ และ $c \equiv d(mod\ \ n)$ แล้ว $ax + cy \equiv bx + dy(mod\ \ n)$, $\exists x, y \in \mathbb{Z}$

8.) ถ้า $a \equiv b(mod\ \ n)$ และ $c \equiv d(mod\ \ n)$ แล้ว $ac \equiv bd(mod\ \ n)$

9.) ถ้า $a \equiv b(mod\ \ n)$ และ $k \mid n$ โดยที่ $k > 0$ แล้ว $a \equiv b(mod\ \ d)$, $\exists k \in \mathbb{Z}$

ทฤษฎีบท 27 สำหรับจำนวนเต็ม $a, b, m_1, m_2, \ldots, m_r$ ใดๆ โดยที่ $m_i > 0$

1.) ถ้า $a \equiv b(mod\ \ m_i)$, $i = 1, 2, \ldots, r$ จะได้ว่า $a \equiv b(mod\ \ [m_1, m_2, \ldots, m_r])$

2.) ถ้า $a \equiv b(mod\ \ m_i)$, $i = 1, 2, \ldots, r$ และ $m_1, m_2, \ldots, m_r$ เป็นจำนวนเฉพาะสัมพัทธ์ทุกคู่ แล้ว $a \equiv b(mod\ \ m_1 m_2 \ldots m_r)$

3.) ถ้า $a \equiv b(mod\ \ m_i)$, $i = 1, 2$ และ $gcd(m_1, m_2 = 1)$ แล้ว $a \equiv b(mod\ \ m_1 m_2)$

ทฤษฎีบท 28 สำหรับทุกๆ $a, b, c \in \mathbb{Z}$ และ $n \in \mathbb{Z}^+$ ให้ $a \equiv b(mod\ \ n)$ จะได้ว่า

1.) $a \pm c \equiv b \pm c(mod\ \ n)$

2.) $ac \equiv bc(mod\ \ n)$

ทฤษฎีบท 29 สำหรับจำนวนเต็ม a, b และ n ใดๆ โดยที่ $n > 0$ ถ้า $a \equiv b(mod\ \ n)$ แล้ว $gcd(a, n) = gcd(b, n)$

ทฤษฎีบท 30 ทุกๆจำนวนเต็ม a จะมีจำนวนเต็ม r เพียงตัวเดียวที่ $0 \le r \le n$ โดยที่ $n > 0$ และ $a \equiv r(mod\ \ n)$

ทฤษฎีบท 31 ให้ a, b, c และ $n \in \mathbb{Z}$ โดยที่ $n > 0$ จะได้ว่า

1.) ถ้า $ca \equiv cb(mod\ \ n)$ แล้ว $a \equiv b(\text{ mod } \dfrac{n}{gcd(c, n)})$

2.) ถ้า $ca \equiv cb(mod\ \ n)$ และ $gcd(c, n) = 1$ แล้ว $a \equiv b(mod\ \ n)$

2.6 สมการไดโอแฟนไทน์กำลังสอง

2.6.1 นิยามและทฤษฎีบทที่จำเป็น

บทนิยาม 9 สำหรับทุกๆจำนวนเต็ม x จะเรียก x^2 ว่า **จำนวนกำลังสอง** (Square Number)

บทนิยาม 10 สำหรับทุกๆจำนวนเต็มบวก x, y, z ที่สอดคล้องกับสมการ $x^2 + y^2 = z^2$ เราเรียก (x, y, x) ว่า **สามจำนวนของปีธากอรัส** (Pythagorean Triple)

ทฤษฎีบท 32 ให้ x_0, y_0, z_0 เป็นคำตอบของสมการปีธากอรัส จะได้ว่า

1.) $3 \mid x_0$ หรือ $3 \mid y_0$

2.) $5 \mid x_0$ หรือ $5 \mid y_0$ หรือ $5 \mid z_0$

ทฤษฎีบท 33 ถ้า (x_0, y_0, z_0) เป็น
สามจำนวนของปีธากอรัส และ $c \in \mathbb{N}$ จะได้ว่า (cx_0, cy_0, cz_0) เป็นสามจำนวนของปีธากอรัส

> **การพิสูจน์:** เพราะว่า $(cx_0)^2 + (cy_0)^2 = c^2(x_0^2 + y_0^2) = c^2 z_0^2 = (cz_0)^2$ ดังนั้น (cx_0, cy_0, cz_0) เป็นสามจำนวนของปีธากอรัส ❑

ทฤษฎีบท 34 ถ้า (x_0, y_0, z_0) เป็นสามจำนวนของปีธากอรัส และ $gcd(x_0, y_0, z_0) = 1$ จะได้ว่า $gcd(x_0, y_0) = gcd(y_0, z_0) = gcd(x_0, z_0) = 1$

ทฤษฎีบท 35 ถ้า (x_0, y_0, z_0) เป็นสามจำนวนของปีธากอรัส และ $d = gcd(x_0, y_0, z_0)$ จะได้ว่า $(\frac{x_0}{d}, \frac{y_0}{d}, \frac{z_0}{d})$ และ $(\frac{x_0}{d}, \frac{y_0}{d}, \frac{z_0}{d}) = 1$

บทนิยาม 11 เราจะเรียก (x_0, y_0, z_0) ว่าเป็น **รากปฐมภูมิ** (Primitive Pythagorean Triple) ของสมการปีธากอรัส ก็ต่อเมื่อ $gcd(x_0, y_0, z_0) = 1$

ทฤษฎีบท 36 ถ้า (x_0, y_0, z_0) เป็นสามจำนวนที่เป็นรากปฐมภูมิของ สมการปีธากอรัส จะได้ว่า $x_0 \not\equiv y_0 (mod\ 2)$

ทฤษฎีบท 37 ผลเฉลย (x_0, y_0, z_0) ของสมการปีธากอรัสจะอยู่ในรูป $x_0 = a^2 - b^2$, $y_0 = 2ab$ และ $z_0 = a^2 + b^2$ เมื่อ $a, b \in \mathbb{Z}^+$, $a > b$, $gcd(a, b) = 1$ และ $a \not\equiv b (mod\ 2)$

ทฤษฎีบท 38 สมการ $n = x^2 - y^2$ มีคำตอบ $x, y \in \mathbb{Z}$ ก็ต่อเมื่อ n เป็นจำนวนคี่ หรือ $4 \mid n$

บทนิยาม 12 เราจะเรียกคำตอบของสมการ $n = x^2 - y^2$ ว่าเป็น รากปฐมภูมิ (Primitive Roots) ก็ต่อเมื่อ $gcd(x, y) = 1$

ทฤษฎีบท 39 ให้ p เป็นจำนวนเฉพาะและสมการ $p = x^2 + y^2$ มีคำตอบที่เป็นจำนวนเต็มบวก x, y จะได้ว่า สมการ $u^2 \equiv -1 (mod\ p)$ มีคำตอบ

ทฤษฎีบท 40 ให้ p เป็นจำนวนเฉพาะและสมการ $u^2 \equiv -1 (mod\ p)$ มีคำตอบ จะได้ว่า มีจำนวนเต็มบวก x, y ซึ่ง $p = x^2 + y^2$

ทฤษฎีบท 41 ให้ p เป็นจำนวนเฉพาะ จะได้ว่า
มีจำนวนเต็มบวก x, y ที่ทำให้ $p = x^2 + y^2$ ก็ต่อเมื่อ $p = 2$ หรือ $p \equiv 1(mod\ 4)$

ทฤษฎีบท 42 ให้ $n = p_1^{a_1} p_2^{a_2} \ldots p_k^{a_k}$ แทนการเขียน n ในรูปแบบบัญญัติ จะได้ว่า n สามารถเขียนได้ในรูปแบบผลบวกของกำลังสองของจำนวนเต็มสองจำนวนได้ ก็ต่อเมื่อ สำหรับแต่ละ $i \in \{1, 2, \ldots, k\}$ ถ้า p_i เป็นจำนวนเฉพาะ ซึ่ง $p_1 \equiv 3(mod\ 4)$ แล้ว $a_i \equiv 0(mod\ 2)$

2.7 ภาวะส่วนกลับกำลังสอง

บทนิยาม 13 $\forall m \in \mathbb{Z}^+$ โดยที่ $m > 2$ และ $\exists c \in \mathbb{Z}$ ซึ่ง $gcd(c, m) = 1$ ถ้า $\exists x \in \mathbb{Z}; x^2 \equiv c(\bmod m)$ จะเรียก c ว่า **เป็นส่วนตกค้างกำลังสอง** (Quadratic Residue) ของ m และ ถ้า $x^2 \not\equiv c(\bmod m)$ จะเรียก c ว่า **ไม่เป็นส่วนตกค้างกำลังสอง** (Quadratic Nonresidue) ของ m

ทฤษฎีบท 43 ถ้า p เป็นจำนวนเฉพาะคี่แล้ว จะมีส่วนตกค้างกำลังสอง มอดุโล p อยู่ จำนวน $\frac{p-1}{2}$ ตัว

2.7.1 สัญลักษณ์ของเลอจองด์

นิยามและทฤษฎีบทที่สำคัญ

บทนิยาม 14 กำหนดให้ p เป็นจำนวนเฉพาะคี่ และ a เป็นจำนวนเต็ม ซึ่ง $p \nmid a$ สัญลักษณ์ $\left(\frac{a}{p}\right)$ เรียกว่า **สัญลักษณ์ของเลอจองด์** (Legendre Symbol) โดยที่

$$\left(\frac{a}{p}\right) = \begin{cases} 1 & \text{ถ้า } a \text{ เป็นส่วนตกค้างกำลังสองของ } p \\ -1 & \text{ถ้า } a \text{ ไม่เป็นส่วนตกค้างกำลังสองของ } p \end{cases}$$

ทฤษฎีบท 44 [**เกณฑ์ของออยเลอร์** (Eulur's Criterion)] ถ้า p เป็น จำนวนเฉพาะคี่ และ a เป็นจำนวนเต็มที่ $p \nmid a$ แล้ว $\left(\frac{a}{p}\right) \equiv a^{(p-1)/2}(mod\ p)$

ทฤษฎีบท 45 ให้ p เป็นจำนวนเฉพาะคี่ และ a, b เป็นจำนวนเต็มที่ $p \nmid a$ และ $p \nmid b$ จะได้ว่า

1.) $a \equiv b(mod\ p) =: \left(\frac{a}{p}\right) = \left(\frac{b}{p}\right)$

2.) $\left(\frac{ab}{p}\right) = \left(\frac{a}{p}\right)\left(\frac{b}{p}\right)$

3.) $\left(\frac{a^2}{p}\right) = 1$

ทฤษฎีบท 46 ให้ p เป็นจำนวนะเฉพาะคี่ จะได้ว่า $\left(\frac{-1}{p}\right) = (-1)^{(p-1)/2}$

นั่นคือ $$\left(\frac{-1}{p}\right) = \begin{cases} 1 & \text{เมื่อ } p \equiv 1 (mod\ 4) \\ -1 & \text{เมื่อ } p \equiv 3 (mod\ 4) \end{cases}$$

ทฤษฎีบท 47 สำหรับจำนวนเฉพาะคี่ p จะได้ว่า $\left(\frac{2}{p}\right) = (-1)^{(p^2-1)/8}$

นั่นคือ $$\left(\frac{2}{p}\right) = \begin{cases} 1 & \text{เมื่อ } p \equiv 1 (mod\ 8) \text{ หรือ } p \equiv 7 (mod\ 8) \\ -1 & \text{เมื่อ } p \equiv 3 (mod\ 8) \text{ หรือ } p \equiv 5 (mod\ 8) \end{cases}$$

ทฤษฎีบท 48 [**กฎภาวะส่วนกลับกำลังสอง** (The Quadratic Reci- procal Law)] ให้ p และ q เป็นจำนวนเฉพาะคี่ที่ต่างกัน จะได้ว่า $\left(\frac{2}{p}\right) = (-1)^{\frac{p-1}{2}\frac{q-1}{2}}$

ทฤษฎีบท 49 ให้ p เป็นจำนวนเฉพาะคี่ a เป็นจำนวนเต็มที่ $p \nmid a$ จะได้ว่า สำหรับทุกๆ จำนวนเต็มบวก n จะได้ว่า $x^2 \equiv a(mod\ p^n)$ มีผลเฉลยก็ต่อเมื่อ $\left(\frac{a}{p}\right) = 1$

ทฤษฎีบท 50 ให้ a เป็นจำนวนเต็มที่ $a > 1$ จะได้ว่า ถ้าไม่มีจำนวนเต็ม $k > 1$ ที่ $a = k^2$ แล้ว จะมีจำนวนเฉพาะ p อยู่เป็นจำนวนอนันต์ที่ a ไม่เป็นส่วนตกค้างกำลัง สองมอดุโล p

3 ลำดับอนันต์

3.1 ความรู้พื้นฐานที่จำเป็น

1. นำนิพจน์ n กำลังสูงสุด หารทุกพจน์ของลำดับนั้นๆ

2. ใช้สมบัติของลิมิตต่อไปนี้ช่วยหาผลลัพธ์ เมื่อ a_n, b_n เป็นลำดับอนันต์ใดๆ, $\forall n \in \mathbb{N}$

   (a) $\lim\limits_{n\to\infty} c = c$ เมื่อ c เป็นค่าคงที่ใดๆ

   (b) $\lim\limits_{n\to\infty} a_n \pm b_n = \lim\limits_{n\to\infty} a_n \pm \lim\limits_{n\to\infty} b_n$

   (c) $\lim\limits_{n\to\infty} a_n \cdot b_n = \lim\limits_{n\to\infty} a_n \cdot \lim\limits_{n\to\infty} b_n$

   (d) $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{a_n}{b_n} = \dfrac{\lim\limits_{n\to\infty} a_n}{\lim\limits_{n\to\infty} b_n}$ เมื่อ $\lim\limits_{n\to\infty} b_n \neq 0$

   (e) $\lim\limits_{n\to\infty} a_n^k = \left(\lim\limits_{n\to\infty} a_n\right)^k, k \in \mathbb{R}$

   (f) $\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[m]{a_n} = \sqrt[m]{\lim\limits_{n\to\infty} a_n}, m \in \mathbb{R}$

   (g) $\lim\limits_{n\to\infty} |a_n| = \left|\lim\limits_{n\to\infty} a_n\right|$

   (h) $\lim\limits_{n\to\infty} (\log a_n) = \log\left(\lim\limits_{n\to\infty} a_n\right)$

   (i) $\lim\limits_{n\to\infty} (\sin a_n) = \sin\left(\lim\limits_{n\to\infty} a_n\right)$

   (j) $\lim\limits_{n\to\infty} \left(\dfrac{a}{b}\right)^n = \begin{cases} 0 & \text{เมื่อ } |a| < |b| \\ \infty & \text{เมื่อ } |a| > |b| \end{cases} \qquad a, b \in \mathbb{R}, b \neq 0$

   (k) $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{1}{n^k} = 0, k \in \mathbb{R}^+$

   (l) $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{1}{a^n} = 0, a \neq 0$

3.2 ตัวอย่างโจทย์การหาค่าลิมิตของลำดับอนันต์

1. จงหาค่าของ $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{3n^2-n+5}{5n-n^2}$ (ครูอาหนึ่ง ชูไวย)

วิธีทำ
$$\lim_{n\to\infty}\frac{3n^2-n+5}{5n-n^2}=\frac{\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{3n^2}{n^2}-\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{n}{n^2}+\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{5}{n^2}}{\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{5n}{n^2}-\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{n^2}{n^2}}$$
$$=\frac{3-0+0}{0-2}$$
$$=-\frac{3}{2} \qquad \blacksquare$$

2. จงหาค่าของ $\lim\limits_{n\to\infty}\left|-\dfrac{\sqrt{2n^2-1}}{5n+2}\right|, \forall n\in\mathbb{N}$ (ครูอาหนึ่ง ชูไวย)

วิธีทำ
$$\lim_{n\to\infty}\left|-\frac{\sqrt{2n^2-1}}{5n+2}\right|=\left|\lim_{n\to\infty}-\frac{\sqrt{2n^2-1}}{5n+2}\right|$$
$$=\left|-\frac{\sqrt{\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{2n^2}{n^2}-\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{1}{n^2}}}{\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{5n}{\sqrt{n^2}}+\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{2}{\sqrt{n^2}}}\right|$$
$$=\left|-\frac{\sqrt{2-0}}{5+0}\right|$$
$$=\frac{\sqrt{2}}{5} \qquad \blacksquare$$

3. จงหาค่าของ $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{\sqrt{n}+\sqrt[3]{n}+1}{5-\sqrt[4]{n}+3\sqrt{5n}}$ (ครูอาหนึ่ง ชูไวย)

<u>วิธีทำ</u>

$$\lim_{n\to\infty}\frac{\sqrt{n}+\sqrt[3]{n}+1}{5-\sqrt[4]{n}+3\sqrt{5n}} = \lim_{n\to\infty}\frac{n^{\frac{1}{2}}+n^{\frac{1}{3}}+1}{5-n^{\frac{1}{4}}+3\sqrt{5}n^{\frac{1}{2}}}$$

$$= \frac{\lim\limits_{n\to\infty}\frac{n^{\frac{1}{2}}}{n^{\frac{1}{2}}}+\lim\limits_{n\to\infty}\frac{n^{\frac{1}{3}}}{n^{\frac{1}{2}}}+\lim\limits_{n\to\infty}\frac{1}{n^{\frac{1}{2}}}}{\lim\limits_{n\to\infty}\frac{5}{n^{\frac{1}{2}}}-\lim\limits_{n\to\infty}\frac{n^{\frac{1}{4}}}{n^{\frac{1}{2}}}+\lim\limits_{n\to\infty}\frac{3\sqrt{5}n^{\frac{1}{2}}}{n^{\frac{1}{2}}}}$$

$$= \frac{1+0+0}{0+0+3\sqrt{5}}$$

$$= \frac{1}{3\sqrt{5}} \qquad \blacksquare$$

4. จงหาค่าของ $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\dfrac{3n^3-n+5}{2n^3+2}+2\right)$ (ครูอาหนึ่ง ชูไวย)

<u>วิธีทำ</u>

$$\lim_{n\to\infty}\left(\frac{3n^3-n+5}{2n^3+2}+2\right) = \lim_{n\to\infty}\frac{3n^3-n+5}{2n^3+2}+\lim_{n\to\infty}2$$

$$= \frac{\lim\limits_{n\to\infty}\frac{3n^3}{n^3}-\lim\limits_{n\to\infty}\frac{n}{n^3}+\lim\limits_{n\to\infty}\frac{5}{n^3}}{\lim\limits_{n\to\infty}\frac{2n^3}{n^3}+\lim\limits_{n\to\infty}\frac{2}{n^3}}+2$$

$$= \frac{3-0+0}{2+0}+2$$

$$= \frac{3}{2}+\frac{4}{2}$$

$$= \frac{7}{2} \qquad \blacksquare$$

5. จงหาค่าของ $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\frac{1}{n}+\frac{2}{n^3}\right)$ (ครูอาหนึ่ง ชูไวย)

<u>วิธีทำ</u> $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\frac{1}{n}+\frac{2}{n^3}\right)$ $= \lim\limits_{n\to\infty}\frac{n^3+2n}{n^4}$

$$= \frac{\lim\limits_{n\to\infty}\frac{n^3}{n^4}+\lim\limits_{n\to\infty}\frac{2n}{n^4}}{\lim\limits_{n\to\infty}\frac{n^4}{n^4}}$$

$$= \frac{0+0}{1}$$

$$= 0 \qquad \blacksquare$$

6. $\lim\limits_{n\to\infty}\left\{\left|\left(\frac{1}{2}\right)^n\right|+\left(\frac{2n}{n+1}\right)\right\}$ (ครูอาหนึ่ง ชูไวย)

<u>วิธีทำ</u> $\lim\limits_{n\to\infty}\left\{\left|\left(\frac{1}{2}\right)^n\right|+\left(\frac{2n}{n+1}\right)\right\}$ $= \lim\limits_{n\to\infty}\left|\left(\frac{1}{2}\right)^n\right|+\lim\limits_{n\to\infty}\frac{2n}{n+1}$

$$= |0| + \frac{\lim\limits_{n\to\infty}\frac{2n}{n}}{\lim\limits_{n\to\infty}\frac{n}{n}+\lim\limits_{n\to\infty}\frac{1}{n}}$$

$$= 0 + \frac{2}{1+0}$$

$$= 2 \qquad \blacksquare$$

7. $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{3n}{\sqrt[3]{8n^3+1}}$ (ครูอาหนึ่ง ชูไวย)

<u>วิธีทำ</u>

$$\lim_{n\to\infty} \frac{3n}{\sqrt[3]{8n^3+1}} = \lim_{n\to\infty} \frac{\sqrt[3]{27n^3}}{\sqrt[3]{8n^3+1}}$$

$$= \lim_{n\to\infty} \sqrt[3]{\frac{27n^3}{8n^3+1}}$$

$$= \sqrt[3]{\lim_{n\to\infty} \frac{27n^3}{8n^3+1}}$$

$$= \sqrt[3]{\frac{\lim\limits_{n\to\infty} \frac{27n^3}{n^3}}{\lim\limits_{n\to\infty} \frac{8n^3}{n^3} + \lim\limits_{n\to\infty} \frac{1}{n^3}}}$$

$$= \sqrt[3]{\frac{27}{8+0}}$$

$$= \frac{3}{2} \quad \blacksquare$$

8. $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{\sqrt[3]{n^5+1}}{\sqrt[4]{n^3+n^2+n+1}}$ (ครูอาหนึ่ง ชูไวย)

<u>วิธีทำ</u>

$$\lim_{n\to\infty} \frac{\sqrt[3]{n^5+1}}{\sqrt[4]{n^3+n^2+n+1}} = \frac{\sqrt[3]{\lim\limits_{n\to\infty} \frac{n^5}{n^5} + \lim\limits_{n\to\infty} \frac{1}{n^5}}}{\sqrt[4]{\lim_{n\to\infty} \frac{n^3}{n^5} + \lim\limits_{n\to\infty} \frac{n^2}{n^5} + \lim\limits_{n\to\infty} \frac{n}{n^5} + \lim\limits_{n\to\infty} \frac{1}{n^5}}}$$

$$= \frac{\sqrt[3]{1+0}}{\sqrt[4]{0+0+0+0}}$$

$$= \frac{\sqrt[3]{1}}{\sqrt[4]{0}}$$

$$= \frac{1}{0}$$

= หาค่าไม่ได้ $\blacksquare$

9. $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{\sin(\pi n^2)+n}{\sqrt{36n^4+1}}$ (ครูอาหนึ่ง ชูไวย)

วิธีทำ $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{\sin(\pi n^2)+n}{\sqrt{36n^4+1}} = \dfrac{\sin(\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt{\dfrac{\pi^2 n^4}{n^4}})+\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt{\dfrac{n^2}{n^4}}}{\sqrt{\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{36n^4}{n^4}+\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{1}{n^4}}}$

$= \dfrac{\sin|\pi|+0}{\sqrt{36+0}}$

$= \dfrac{0}{6}$

$= 0$ ■

10. $\lim\limits_{n\to\infty}\log\left(\dfrac{n^3+2}{\sqrt{n^6-5}}\right), \forall n\in\mathbb{N}$ (ครูอาหนึ่ง ชูไวย)

วิธีทำ $\lim\limits_{n\to\infty}\log\left(\dfrac{n^3+2}{\sqrt{n^6-5}}\right) = \log\left(\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{n^3+2}{\sqrt{n^6-5}}\right)$

$= \log\left(\dfrac{\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{n^3}{\sqrt{n^6}}+\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{2}{\sqrt{n^6}}}{\sqrt{\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{n^6}{n^6}-\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{5}{n^6}}}\right)$

$= \log\left(\dfrac{1+0}{1-0}\right)$

$= \log 1$

$= 0$ ■

นักเรียนพึงสังเกต

- @☞ ถ้า $\lim\limits_{n\to\infty}a_n = A$ แล้ว $\lim\limits_{n\to\infty}\sin a_n = \sin\lim\limits_{n\to\infty}a_n = \sin A$
- @☞ ถ้า $\lim\limits_{n\to\infty}b_n = B$ แล้ว $\lim\limits_{n\to\infty}\log b_n = \log\lim\limits_{n\to\infty}b_n = \log B$
- @☞ $\sum\limits_{i=1}^{n} i = 1+2+\ldots+n = \dfrac{n}{2}(n+1)$
- @☞ $\sum\limits_{i=1}^{n} i^2 = 1^2+2^2+\ldots+n^2 = \dfrac{n}{6}(n+1)(2n+1)$

- @☞ $\sum_{i=1}^{n} i^3 = 1^3 + 2^3 + \ldots + n^3 = \left(\frac{n}{2}(n+1)\right)^2$

11. $\lim_{n\to\infty}\left(\frac{1+2+3+\ldots+n}{3n^2+1}\right)$ (ครูอาหนึ่ง ชูไวย)

วิธีทำ $\lim_{n\to\infty}\left(\frac{1+2+3+\ldots+n}{3n^2+1}\right) = \lim_{n\to\infty}\left(\frac{\frac{n}{2}(n+1)}{3n^2+1}\right)$

$$= \lim_{n\to\infty}\frac{n^2+n}{6n^2+2}$$

$$= \frac{\lim_{n\to\infty}\frac{n^2}{n^2} + \lim_{n\to\infty}\frac{n}{n^2}}{\lim_{n\to\infty}\frac{6n^2}{n^2} + \lim_{n\to\infty}\frac{2}{n^2}}$$

$$= \frac{1+0}{6+0}$$

$$= \frac{1}{6} \quad \blacksquare$$

12. $\lim_{n\to\infty}\left(\frac{1^2+2^2+3^2+\ldots+n^2}{n^3-1}\right)$ (ครูอาหนึ่ง ชูไวย)

วิธีทำ
$$\lim_{n\to\infty}\left(\frac{1^2+2^2+3^2+\ldots+n^2}{n^3-1}\right) = \lim_{n\to\infty}\left(\frac{\frac{n}{6}(n+1)(2n+1)}{n^3-1}\right)$$
$$= \lim_{n\to\infty}\left(\frac{\frac{2n^3+3n^2+n}{6}}{n^3-1}\right)$$
$$= \lim_{n\to\infty}\frac{2n^3+3n^2+n}{6n^3-6}$$
$$= \frac{\lim_{n\to\infty}\frac{2n^3}{n^3}+\lim_{n\to\infty}\frac{3n^2}{n^3}+\lim_{n\to\infty}\frac{n}{n^3}}{\lim_{n\to\infty}\frac{6n^3}{n^3}-\lim_{n\to\infty}\frac{6}{n^3}}$$
$$= \frac{2+0+0}{6-0}$$
$$= \frac{2}{6}$$
$$= \frac{1}{3} \qquad \blacksquare$$

13. $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\dfrac{1^3+2^3+3^3+\ldots+n^3}{5n^4-3n+7}\right)$ (ครูอาหนึ่ง ชูไวย)

วิธีทำ
$$\lim_{n\to\infty}\left(\frac{1^3+2^3+3^3+\ldots+n^3}{5n^4-3n+7}\right) = \lim_{n\to\infty}\left(\frac{\left[\frac{n}{2}(n+1)\right]^2}{5n^4-3n+7}\right)$$
$$= \lim_{n\to\infty}\left(\frac{\frac{n^4+2n^3+n^2}{4}}{5n^4-3n+7}\right)$$
$$= \lim_{n\to\infty}\frac{n^4+2n^3+n^2}{20n^4-12n+28}$$
$$= \frac{\lim\limits_{n\to\infty}\frac{n^4}{n^4}+\lim\limits_{n\to\infty}\frac{2n^3}{n^4}+\lim\limits_{n\to\infty}\frac{n^2}{n^4}}{\lim\limits_{n\to\infty}\frac{20n^4}{n^4}-\lim\limits_{n\to\infty}\frac{12n}{n^4}+\lim\limits_{n\to\infty}\frac{28}{n^4}}$$
$$= \frac{1+0+0}{20-0+0}$$
$$= \frac{1}{20} \qquad \blacksquare$$

14. $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{7^{n+1}+5^{n-1}}{3^{n+1}+7^{n-1}}$ (ครูอาหนึ่ง ชูไวย)

วิธีทำ
$$\lim_{n\to\infty}\frac{7^{n+1}+5^{n-1}}{3^{n+1}+7^{n-1}} = \lim_{n\to\infty}\frac{7\cdot7^n+\frac{1}{5}\cdot5^n}{3\cdot3^n+\frac{1}{7}\cdot7^n}$$
$$= \frac{\lim\limits_{n\to\infty}7\cdot\frac{7^n}{7^n}+\lim\limits_{n\to\infty}\frac{1}{5}\cdot\frac{5^n}{7^n}}{\lim\limits_{n\to\infty}3\cdot\frac{3^n}{7^n}+\lim\limits_{n\to\infty}\frac{1}{7}\cdot\frac{7^n}{7^n}}$$
$$= \frac{7\cdot1+\frac{1}{5}\cdot0}{3\cdot0+\frac{1}{7}\cdot1}$$
$$= \frac{7}{\frac{1}{7}}$$
$$= 49 \qquad \blacksquare$$

15. สำหรับจำนวนเต็มบวก n ใดๆ ให้ $M_n = \begin{bmatrix} \frac{2}{n} & n-1 \\ -\frac{1}{2n} & n+1 \end{bmatrix}$ และ $a_n = |\det(M_n)|$ จงหา $\lim_{n\to\infty} a_n$

(ครูอาหนึ่ง ชูไวย)

<u>วิธีทำ</u>

$$\lim_{n\to\infty} a_n = \lim_{n\to\infty} |\det(M_n)|$$

$$= \left|\lim_{n\to\infty} \det(M_n)\right|$$

$$= \left|\lim_{n\to\infty} \left(\frac{2}{n}(n+1) - (-\frac{1}{2n})(n+1)\right)\right|$$

$$= \left|\lim_{n\to\infty} \left(\frac{2n+2}{n} + \frac{n+1}{2n}\right)\right|$$

$$= \left|\lim_{n\to\infty} \left(\frac{4n+4}{2n} + \frac{n+1}{2n}\right)\right|$$

$$= \left|\lim_{n\to\infty} \frac{5n+5}{2n}\right|$$

$$= \left|\frac{\lim_{n\to\infty} \frac{5n}{n} + \lim_{n\to\infty} \frac{5}{n}}{\lim_{n\to\infty} \frac{2n}{n}}\right|$$

$$= \left|\frac{5+0}{2}\right|$$

$$= \frac{5}{2} \qquad \blacksquare$$

4 ลิมิตและความต่อเนื่องของฟังก์ชัน

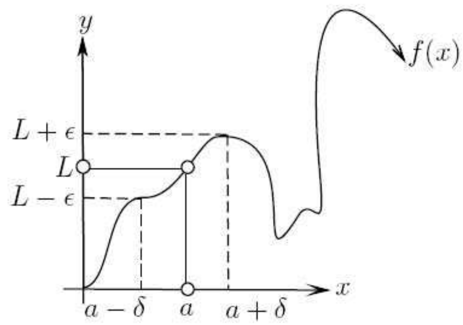
4.1 สรุปสูตรและทฤษฎีบทของลิมิต

1. $\lim\limits_{x\to a} k = k$ เมื่อ k เป็นค่าคงที่
2. $\lim\limits_{x\to a} x = a$
3. $\lim\limits_{x\to a}[kf(x)] = k\lim\limits_{x\to a} f(x)$
4. $\lim\limits_{x\to a}[f(x)\pm g(x)] = \lim\limits_{x\to a} f(x) \pm \lim\limits_{x\to a} g(x)$
5. $\lim\limits_{x\to a}[f(x)\cdot g(x)] = [\lim\limits_{x\to a} f(x)][\lim\limits_{x\to a} g(x)]$
6. $\lim\limits_{x\to a}\dfrac{f(x)}{g(x)} = \dfrac{\lim\limits_{x\to a} f(x)}{\lim\limits_{x\to a} g(x)}$ เมื่อ $\lim\limits_{x\to a} g(x) \neq 0$
7. $\lim\limits_{x\to a}[f(x)]^n = [\lim\limits_{x\to a} f(x)]^n$
8. $\lim\limits_{x\to a}\sqrt[n]{f(x)} = \sqrt[n]{\lim\limits_{x\to a} f(x)}$
9. $\lim\limits_{x\to a}|f(x)| = |\lim\limits_{x\to a} f(x)|$

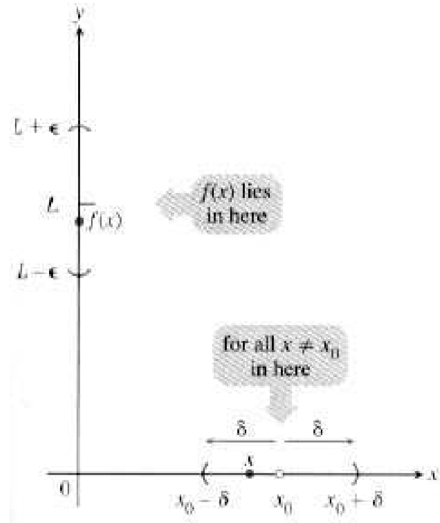
หมายเหตุ สูตร 1.–9. ยังคงเป็นจริงสำหรับการแทนค่า $x\to a$ ด้วย $x\to a^+$ หรือ $x\to a^-$

$$\lim_{x\to a} f(x) = L \text{ ก็ต่อเมื่อ } \lim_{x\to a^+} f(x) = L \text{ และ } \lim_{x\to a^-} f(x) = L$$

นั่นคือ $\lim\limits_{x\to a} f(x)$ จะมีค่า ก็ต่อเมื่อ ลิมิตทางซ้ายและลิมิตทางขวามีค่าเท่ากัน



รูปที่ 4.1: ลิมิตของฟังก์ชัน(1)



รูปที่ 4.2: ลิมิตของฟังก์ชัน(2)

ทฤษฎีบท 51 ให้ f และ g เป็นฟังก์ชัน ถ้า $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = L$ เมื่อ $L \neq 0$ และ $\lim\limits_{x\to+\infty} g(x) = 0$ แล้วจะได้ว่า

1. ถ้ามีจำนวนจริงบวก n ที่ทำให้ $g(x) > 0$ ทุก x ซึ่ง $x > n$ แล้วจะได้ว่า

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{f(x)}{g(x)} = \begin{cases} -\infty & \text{เมื่อ} \quad L < 0 \\ +\infty & \text{เมื่อ} \quad L > 0 \end{cases}$$

2. ถ้ามีจำนวนจริงบวก n ที่ทำให้ $g(x) < 0$ ทุก x ซึ่ง $x > n$ แล้วจะได้ว่า

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{f(x)}{g(x)} = \begin{cases} +\infty & \text{เมื่อ} \quad L < 0 \\ -\infty & \text{เมื่อ} \quad L > 0 \end{cases}$$

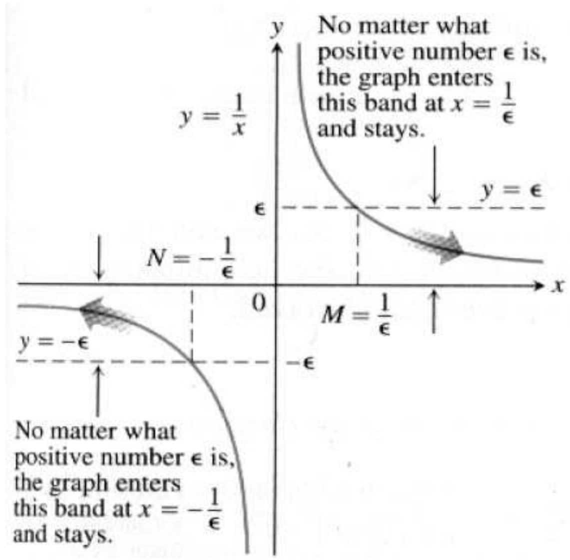
ทฤษฎีบท 52 ให้ f และ g เป็นฟังก์ชัน ถ้า $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = L$ เมื่อ $L \neq 0$ และ $\lim\limits_{x\to-\infty} g(x) = 0$ แล้วจะได้ว่า

1. ถ้ามีจำนวนจริงลบ n ที่ทำให้ $g(x) > 0$ ทุก x ซึ่ง $x < n$ แล้วจะได้ว่า

$$\lim_{x\to-\infty} \frac{f(x)}{g(x)} = \begin{cases} -\infty & \text{เมื่อ} \quad L < 0 \\ +\infty & \text{เมื่อ} \quad L > 0 \end{cases}$$

2. ถ้ามีจำนวนจริงลบ n ที่ทำให้ $g(x) < 0$ ทุก x ซึ่ง $x < n$ แล้วจะได้ว่า

$$\lim_{x\to-\infty} \frac{f(x)}{g(x)} = \begin{cases} +\infty & \text{เมื่อ} \quad L < 0 \\ -\infty & \text{เมื่อ} \quad L > 0 \end{cases}$$



รูปที่ 4.3: ลิมิตทางซ้าย-ทางขวา

ทฤษฎีบท 53 ให้ f และ g เป็นฟังก์ชัน ถ้า $\lim\limits_{x\to a^+} f(x) = L$ เมื่อ $L \neq 0$ และ $\lim\limits_{x\to a^+} g(x) = 0$ แล้วจะได้ว่า

1. ถ้ามีจำนวนจริงบวก δ ที่ทำให้ $g(x) > 0$ ทุก x ซึ่ง $a < x < a+\delta$ แล้วจะได้ว่า

$$\lim_{x\to a^+} \frac{f(x)}{g(x)} = \begin{cases} -\infty & \text{เมื่อ} \quad L < 0 \\ +\infty & \text{เมื่อ} \quad L > 0 \end{cases}$$

2. ถ้ามีจำนวนจริงบวก δ ที่ทำให้ $g(x) < 0$ ทุก x ซึ่ง $a < x < a+\delta$ แล้วจะได้ว่า

$$\lim_{x\to a^+} \frac{f(x)}{g(x)} = \begin{cases} +\infty & \text{เมื่อ} \quad L < 0 \\ -\infty & \text{เมื่อ} \quad L > 0 \end{cases}$$

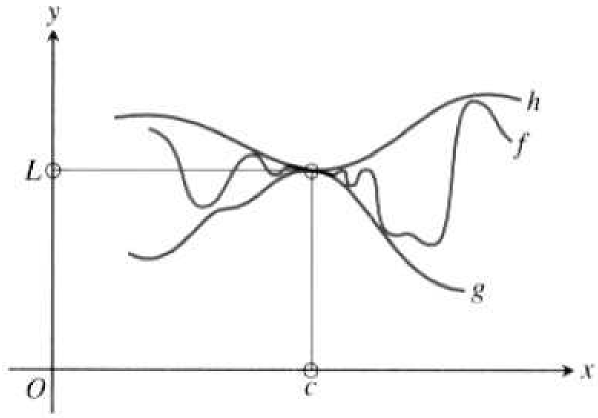
ทฤษฎีบท 54 rm ให้ f และ g เป็นฟังก์ชัน ถ้า $\lim\limits_{x\to a^-} f(x) = L$ เมื่อ $L \neq 0$ และ $\lim\limits_{x\to a^-} g(x) = 0$ แล้วจะได้ว่า

1. ถ้ามีจำนวนจริงบวก δ ที่ทำให้ $g(x) > 0$ ทุก x ซึ่ง $a < x < a+\delta$ แล้วจะได้ว่า

$$\lim_{x\to a^-} \frac{f(x)}{g(x)} = \begin{cases} -\infty & \text{เมื่อ} \quad L < 0 \\ +\infty & \text{เมื่อ} \quad L > 0 \end{cases}$$

2. ถ้ามีจำนวนจริงบวก δ ที่ทำให้ $g(x) < 0$ ทุก x ซึ่ง $a < x < a+\delta$ แล้วจะได้ว่า

$$\lim_{x\to a^-} \frac{f(x)}{g(x)} = \begin{cases} +\infty & \text{เมื่อ} \quad L < 0 \\ -\infty & \text{เมื่อ} \quad L > 0 \end{cases} \qquad \text{(ดังรูปที่ 4.3)}$$



รูปที่ 4.4: ***Sandwich Theorem***

ทฤษฎีบท 55 ให้ f และ g เป็นฟังก์ชัน ถ้า $\lim_{x \to a} f(x) = L$ เมื่อ $L \neq 0$ และ $\lim_{x \to a} g(x) = 0$ แล้วจะได้ว่า

1. ถ้ามีจำนวนจริงบวก δ ที่ทำให้ $g(x) > 0$ ทุก x ซึ่ง $a - \delta < x < a + \delta$ แล้วจะได้ว่า

$$\lim_{x \to a} \frac{f(x)}{g(x)} = \begin{cases} -\infty & \text{เมื่อ} \quad L < 0 \\ +\infty & \text{เมื่อ} \quad L > 0 \end{cases}$$

2. ถ้ามีจำนวนจริงบวก δ ที่ทำให้ $g(x) < 0$ ทุก x ซึ่ง $a - \delta < x < a + \delta$ แล้วจะได้ว่า

$$\lim_{x \to a} \frac{f(x)}{g(x)} = \begin{cases} +\infty & \text{เมื่อ} \quad L < 0 \\ -\infty & \text{เมื่อ} \quad L > 0 \end{cases}$$

ทฤษฎีบท 56 ทฤษฎีบท 6. (***Sandwich Theorem*** หรือ ***Squeeze Theorem***) ให้ f, g และ h เป็นฟังก์ชัน ถ้า $f(x) \le g(x) \le h(x)$ สำหรับทุกๆจำนวนจริง x ที่อยู่ในช่วงเปิดใดๆที่มี a เป็นสมาชิก โดยที่ $x \neq a$ ถ้า $\lim_{x \to a} f(x) = L = \lim_{x \to a} h(x) = L$ จะได้ว่า $\lim_{x \to a} g(x) = L$ (ดังรูปที่ 4.5)

ฟังก์ชัน $y = f(x)$ มีความต่อเนื่องที่จุด $x = a$ ก็ต่อเมื่อ $\lim_{x \to a} f(x) = f(a)$

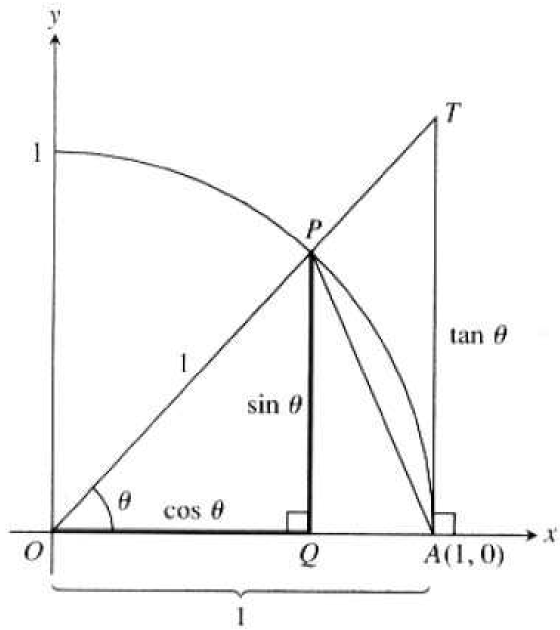
ดังนั้น ถ้าเราต้องการตรวจสอบว่า $y = f(x)$ มีความต่อเนื่องของ ที่จุด $x = a$ ก็ต่อเมื่อ

1. $f(a)$ มีค่า

2. $\lim_{x \to a} f(x)$ มีค่า

3. $\lim_{x \to a} f(x) = f(a)$

ทฤษฎีบท 57 สำหรับ θ ใดๆในระบบเรเดียน จะได้ว่า $\lim_{x \to 0} \frac{\sin x}{x} = 1$ (ดังรูปที่ 4.5)



รูปที่ 4.5: ค่า $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\sin x}{x}$

$$\boxed{\lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{x} = 1}$$

$$\boxed{\lim_{x\to 0}\frac{1-\cos x}{x} = 0}$$

4.2 แนวคิดลิมิตของฟังก์ชัน

กำหนดให้ $f(x)=4x+3$ พิจารณาค่าของ x และ $f(x)$ ดังตารางต่อไปนี้

x	$f(x)$
1	7.0000
1.5	9.0000
1.9	10.6000
1.99	10.9600
1.999	10.9960

ตารางที่ 1.1

x	$f(x)$
3	15.0000
2.5	13.0000
2.1	11.4000
2.01	11.0400
2.001	11.0040

ตารางที่ 1.2

จากตารางที่ 1.1 จะสังเกตได้ว่า $f(x)$ มีค่าเข้าใกล้ 11 ในขณะที่ x มีค่าเข้าใกล้ 2 ทางซ้าย $(x<2)$ เรากล่าวว่า “ลิมิตของ $f(x)$ ในขณะที่ x เข้าใกล้ 2 ทางซ้ายมีค่าเท่ากับ 11” และเขียนแทนด้วย $\lim_{x\to 2^-} f(x)=11$

และจากตารางที่ 1.2 จะสังเกตได้ว่า $f(x)$ มีค่าเข้าใกล้ 11 ในขณะที่ x มีค่าเข้าใกล้ 2 ทางขวา $(x>2)$ เรากล่าวว่า “ลิมิตของ $f(x)$ ในขณะที่ x เข้าใกล้ 2 ทางขวามีค่าเท่ากับ 11” และเขียนแทนด้วย $\lim_{x\to 2^+} f(x)=11$

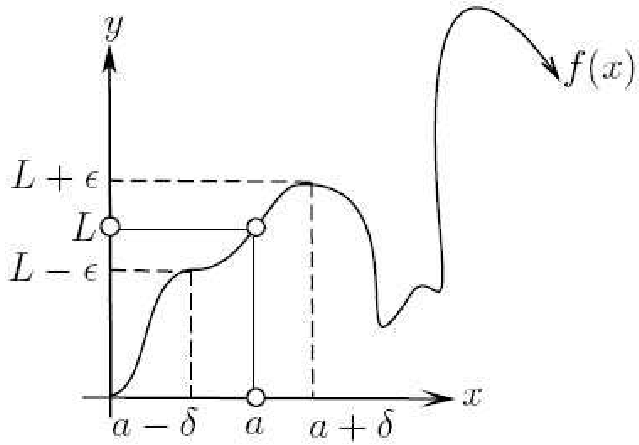
ในกรณีเช่นนี้ $\lim_{x\to 2^-} f(x)=\lim_{x\to 2^+} f(x)=11$ เรากล่าวว่า “ลิมิตของ $f(x)$ ในขณะที่ x เข้าใกล้ 2 มีค่าเท่ากับ 11” และเขียนแทนด้วย $\lim_{x\to 2} f(x)=11$

บทนิยาม 15 ให้ f เป็นฟังก์ชันค่าจริง ซึ่งมีค่าบนช่วงเปิด I, ยกเว้นที่ $a\in I$, $f(a)$ อาจมีค่าหรือไม่ก็ได้ เราเรียกจำนวนจริง L ว่า “ลิมิตของ f ที่ a”ถ้าสำหรับจำนวนจริง $\epsilon>0$ ใดๆ มีจำนวนจริง $\delta>0$ ซึ่งสำหรับทุก $x\in I$ ถ้า $0<|x-a|<\delta$ แล้วทำให้ $|f(x)-L|<\epsilon$ แทน L ด้วยสัญลักษณ์ $\lim_{x\to a} f(x)$

บทนิยาม 16 ให้ L เป็นจำนวนจริง และ $y=f(x)$ จะกล่าวว่า

1. ลิมิตของ $f(x)$ ในขณะที่ x เข้าใกล้ a ทางซ้ายมีค่าเท่ากับ L ก็ต่อเมื่อ $f(x)$ มีค่าเข้าใกล้ L เมื่อ x มีค่าเข้าใกล้ a ทางซ้าย $(x<a)$ และเขียนแทนด้วย $\lim_{x\to a^-} f(x)=L$

2. ลิมิตของ $f(x)$ ในขณะที่ x เข้าใกล้ a ทางขวามีค่าเท่ากับ L ก็ต่อเมื่อ $f(x)$ มีค่าเข้าใกล้ L เมื่อ x มีค่าเข้าใกล้ a ทางขวา $(x>a)$ และเขียนแทนด้วย $\lim_{x\to a^+} f(x)=L$



รูปที่ 4.6: ลิมิตของฟังก์ชัน; $\lim\limits_{x\to a} f(x) = L$

3. ลิมิตของ $f(x)$ ในขณะที่ x เข้าใกล้ a มีค่าเท่ากับ L ก็ต่อเมื่อ $\lim\limits_{x\to a^-} f(x) = \lim\limits_{x\to a^+} f(x) = L$ และในกรณีเช่นนี้ เรากล่าวว่า $\lim\limits_{x\to a} f(x)$ มีค่า และ $\lim\limits_{x\to a} f(x) = L$

ถ้า $\lim\limits_{x\to a^-} f(x) \neq \lim\limits_{x\to a^+} f(x)$ แล้วเรากล่าวว่า $\lim\limits_{x\to a} f(x)$ ไม่มีค่า

$$\boxed{\lim_{x\to a} f(x) = L \text{ ก็ต่อเมื่อ } \lim_{x\to a^-} f(x) = L \text{ และ } \lim_{x\to a^+} f(x) = L}$$

ตัวอย่าง 75 กำหนดให้ $f(x) = x^2 - x + 1$ จงหา $\lim\limits_{x\to 2^-} f(x)$, $\lim\limits_{x\to 2^+} f(x)$ และ $\lim\limits_{x\to 2} f(x)$

วิธีทำ

x	$f(x)$
1	1.0000
1.5	1.7500
1.9	2.7100
1.99	2.9701
1.999	2.9970

x	$f(x)$
3	7.0000
2.5	4.7500
2.1	3.3100
2.01	3.0301
2.001	3.0030

จากตารางจะได้ว่า $\lim\limits_{x\to 2^-} f(x) = 3$ และ $\lim\limits_{x\to 2^+} f(x) = 3$ ดังนั้น $\lim\limits_{x\to 2} f(x) = 3$ □

ตัวอย่าง 76 ให้ $h(x) = \dfrac{2x^2 - x - 6}{x-2}$ จงหา $\lim\limits_{x\to 2^+} h(x)$, $\lim\limits_{x\to 2^-} h(x)$ และ $\lim\limits_{x\to 2} h(x)$

<u>วิธีทำ</u> จากนิยามฟังก์ชัน h จะได้ว่า ที่จุด $x = 2$ ไม่นิยาม แต่สำหรับ $x \neq 2$ จะได้ว่า

$$h(x) = \frac{2x^2 - x - 6}{x-2} = \frac{(2x+3)(x-2)}{x-2} = 2x+3$$

พิจารณาค่าของ $h(x)$ ในขณะที่ x มีค่าเข้าใกล้ 2 ดังตารางต่อไปนี้

x	$h(x)$
1	5.0000
1.5	6.0000
1.9	6.8000
1.99	6.9800
1.999	6.9980

x	$h(x)$
3	9.0000
2.5	8.0000
2.1	7.2000
2.01	7.0200
2.001	7.0020

นั่นคือ $\lim\limits_{x\to 2^-} h(x) = 7$ และ $\lim\limits_{x\to 2^+} h(x) = 7$ ดังนั้น $\lim\limits_{x\to 2} h(x) = 7$ □

ตัวอย่าง 77 จงหา $\lim\limits_{x\to 1^-} f(x)$, $\lim\limits_{x\to 1^+} f(x)$ และ $\lim\limits_{x\to 1} f(x)$ เมื่อกำหนดให้

$$f(x) = \begin{cases} 3x+1 & \text{เมื่อ } x \le 1 \\ x^2+4 & \text{เมื่อ } x > 1 \end{cases}$$

วิธีทำ พิจารณาค่าของ f ดังตารางต่อไปนี้

x	$h(x)$
0	1.0000
0.5	2.5000
0.9	3.70010
0.99	3.9700
0.999	3.9970

x	$h(x)$
2	0.0000
1.5	6.2500
1.1	5.2100
1.01	5.0201
1.001	5.0020

นั่นคือ $\lim_{x\to 1^-} f(x) = 4$ และ $\lim_{x\to 1^+} f(x) = 5$ ดังนั้น $\lim_{x\to 1} f(x)$ ไม่มีค่า □

ตัวอย่าง 78 จงหาค่าของ $\lim_{x\to 0} f(x)$ เมื่อ $f(x) = \frac{\sqrt{1-x}-1}{x}$

วิธีทำ พิจารณาค่าของ $f(x)$ เมื่อ x มีค่าเข้าใกล้ 0 ดังตารางต่อไปนี้

x	$f(x)$ (ค่าประมาณ)
−0.1	−0.4881
−0.01	−0.4988
−0.001	−0.4999
−0.0001	−0.5000
−0.00001	−0.5000

x	$f(x)$ (ค่าประมาณ)
0.1	−0.5132
0.01	−0.5013
0.001	−0.5001
0.0001	−0.5000
0.00001	−0.5000

จากตารางจะได้ว่า $\lim_{x\to 0} f(x) = -0.5$ □

ตัวอย่าง 79 จงหาค่าของลิมิตต่อไปนี้

1. $\lim\limits_{x\to -2}(3x^2-5x+4)$ **2.** $\lim\limits_{x\to 2}(4x^2-3)^3$

3. $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{(2x+4)^3}{(2-5x)^4}$ **4.**

$\lim\limits_{x\to -1}\sqrt[3]{3x^2+6x-5}$

<u>**วิธีทำ**</u> 1. $\lim\limits_{x\to -2}(3x^2-5x+4) = (\lim\limits_{x\to -2}3x^2)-(\lim\limits_{x\to -2}5x)+(\lim\limits_{x\to -2}4)$

$$= 3(\lim_{x\to -2}x^2)-5(\lim_{x\to -2}x)+4$$

$$= 3(\lim_{x\to -2}x)^2-5(-2)+4$$

$$= 3(-2)^2-5(-2)+4 = 26$$

2. $$\lim_{x\to 2}(4x^2-3)^3 = \left(\lim_{x\to 2}(4x^2-3)\right)^3$$

$$= \left(4(2)^2-3\right)^3 = 2197$$

3. $$\lim_{x\to 1}\frac{(2x+4)^3}{(2-5x)^4} = \frac{\lim\limits_{x\to 1}(2x+4)^3}{\lim\limits_{x\to 1}(2-5x)^4}$$

$$= \frac{(\lim\limits_{x\to 1}(2x+4))^3}{(\lim\limits_{x\to 1}(2-5x))^4}$$

$$= \frac{(2(1)+4)^3}{(2-5(1))^4} = \frac{8}{3}$$

4. $$\lim_{x\to -1}\sqrt[3]{3x^2+6x-5} = \sqrt[3]{\lim_{x\to -1}(3x^2+6x-5)}$$

$$= \sqrt[3]{(3(-1)^2+6(-1)-5)} = -2$$

□

ตัวอย่าง 80 กำหนดให้ $f(x)=7-|x-2|$ จงหาค่าของ $\lim\limits_{x\to 2^-} f(x)$, $\lim\limits_{x\to 2^+} f(x)$ และ $\lim\limits_{x\to 2} f(x)$

วิธีทำ เนื่องจาก $|x-2| = \begin{cases} -(x-2) & \text{เมื่อ } x<2 \\ x-2 & \text{เมื่อ } x\ge 2 \end{cases}$

จะได้ว่า $7-|x-2| = \begin{cases} x+5 & \text{เมื่อ } x<2 \\ 9-x & \text{เมื่อ } x\ge 2 \end{cases}$

ดังนั้น $\lim\limits_{x\to 2^-} f(x) = \lim\limits_{x\to 2^-}(x+5) = 2+5 = 7$

และ $\lim\limits_{x\to 2^+} f(x) = \lim\limits_{x\to 2^+}(9-x) = 9-2 = 7$

นั่นคือ $\lim\limits_{x\to 2} f(x) = 7$ □

ตัวอย่าง 81 จงหาค่าของ $\lim\limits_{x\to 3}\dfrac{|x|-3}{|x-3|}$

วิธีทำ จาก $|x| = \begin{cases} -x & \text{เมื่อ } x<0 \\ x & \text{เมื่อ } x\ge 0 \end{cases}$

และ $|x-3| = \begin{cases} -(x-3) & \text{เมื่อ } x<3 \\ x-3 & \text{เมื่อ } x\ge 3 \end{cases}$

จะได้ว่า

$$\lim_{x\to 3^-}\frac{|x|-3}{|x-3|} = \lim_{x\to 3^-}\frac{x-3}{-(x-3)} = \lim_{x\to 3^-} -1 = -1$$

และ

$$\lim_{x\to 3^+}\frac{|x|-3}{|x-3|} = \lim_{x\to 3^+}\frac{x-3}{x-3} = \lim_{x\to 3^+} 1 = 1$$

ดังนั้น $\lim\limits_{x\to 3}\dfrac{|x|-3}{|x-3|}$ ไม่มีค่า □

ตัวอย่าง 82 กำหนดให้ $f(x)=\begin{cases}(x-1)^2 & , \quad x\le 0\\ \dfrac{1}{1+x} & , \quad 0<x<1\\ 5x-3 & , \quad x\ge 1\end{cases}$

จงหาค่าของ $\lim\limits_{x\to 0} f(x)$, $\lim\limits_{x\to 1} f(x)$ และ $\lim\limits_{x\to 2} f(x)$ ถ้าลิมิตมีค่า

วิธีทำ 1. พิจารณา $\lim\limits_{x\to 0} f(x)$ จะได้ว่า

$$\lim_{x\to 0^-} f(x)=\lim_{x\to 0^-}(x-1)^2=1$$

และ

$$\lim_{x\to 0^+} f(x)=\lim_{x\to 0^+}\frac{1}{1+x}=1$$

ดังนั้น $\lim\limits_{x\to 0} f(x)=1$

2. พิจารณา $\lim\limits_{x\to 1} f(x)$ จะได้ว่า

$$\lim_{x\to 1^-} f(x)=\lim_{x\to 1^-}\frac{1}{1+x}=\frac{1}{2}$$

และ

$$\lim_{x\to 1^+} f(x)=\lim_{x\to 1^+}(5x-3)=2$$

ดังนั้น $\lim\limits_{x\to 1} f(x)$ ไม่มีค่า

3. พิจารณา $\lim\limits_{x\to 2} f(x)=\lim\limits_{x\to 2^-}(5x-3)=7$ □

ตัวอย่าง 83 จงหาค่าของ $\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{5x^3+4}{x-3}$

วิธีทำ $$\lim_{x\to 2}\frac{5x^3+4}{x-3}=\frac{\lim\limits_{x\to 2}(5x^3+4)}{\lim\limits_{x\to 2}(x-3)}$$ □

$$=\frac{5\cdot 2^3+4}{2-3}=-44$$

ในบางครั้งเราไม่สามารถหาค่าลิมิตได้โดยตรง เพราะว่า $f(x)$ อยู่ในรูปเศษส่วน ที่เมื่อแทนค่า แล้ว ส่วน $=0$ เช่น

$$\lim_{x\to 2}\frac{x^2-4}{x-2}\neq\frac{\lim\limits_{x\to 2}(x^2-4)}{\lim\limits_{x\to 2}(x-2)}$$

ตัวอย่าง 84 จงหาค่าของลิมิตต่อไปนี้ ถ้าลิมิตมีค่า

1. $\lim\limits_{x\to -3}\dfrac{2x^2+x-15}{x+3}$ 2. $\lim\limits_{h\to 0}\dfrac{1}{h}\left(\dfrac{1}{a+h}-\dfrac{1}{a}\right), a\neq 0$

3. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sqrt{1-x}-1}{x}$ 4. $\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{x^{\frac{2}{3}}-4^{\frac{1}{3}}}{x-2}$

วิธีทำ 1. $$\lim_{x\to -3}\frac{2x^2+x-15}{x+3} = \lim_{x\to -3}\frac{(2x-5)(x+3)}{x+3} = \lim_{x\to -3}(2x-5) = 2(-3)-5 = -11$$

2. $$\begin{aligned}\lim_{h\to 0}\frac{1}{h}\left(\frac{1}{a+h}-\frac{1}{a}\right) &= \lim_{h\to 0}\left(\frac{1}{h}\cdot\frac{a-(a+h)}{a(a+h)}\right)\\ &= \lim_{h\to 0}\frac{-h}{ha(a+h)}\\ &= \lim_{h\to 0}\frac{-1}{a(a+h)}\\ &= \frac{-1}{a(a+0)} = -\frac{1}{a^2}\end{aligned}$$

3. $$\begin{aligned}\lim_{x\to 0}\frac{\sqrt{1-x}-1}{x} &= \lim_{x\to 0}\left(\frac{\sqrt{1-x}-1}{x}\cdot\frac{\sqrt{1-x}+1}{\sqrt{1-x}+1}\right)\\ &= \lim_{x\to 0}\frac{(1-x)-1}{x(\sqrt{1-x}+1)}\\ &= \lim_{x\to 0}\frac{-x}{x(\sqrt{1-x}+1)}\\ &= \lim_{x\to 0}\frac{-1}{\sqrt{1-x}+1}\\ &= \frac{-1}{\sqrt{1-0}+1} = -\frac{1}{2}\end{aligned}$$

4. $$\begin{aligned}\lim_{x\to 2}\frac{x^{\frac{2}{3}}-4^{\frac{1}{3}}}{x-2} &= \lim_{x\to 2}\frac{x^{\frac{2}{3}}-2^{\frac{2}{3}}}{x-2}\\ &= \lim_{x\to 2}\frac{(x^{\frac{1}{3}}-2^{\frac{1}{3}})(x^{\frac{1}{3}}+2^{\frac{1}{3}})}{(x^{\frac{1}{3}}-2^{\frac{1}{3}})(x^{\frac{2}{3}}+x^{\frac{1}{3}}\cdot 2^{\frac{1}{3}}+2^{\frac{2}{3}})}\\ &= \lim_{x\to 2}\frac{x^{\frac{1}{3}}+2^{\frac{1}{3}}}{x^{\frac{2}{3}}+x^{\frac{1}{3}}\cdot 2^{\frac{1}{3}}+2^{\frac{2}{3}}}\\ &= \frac{2^{\frac{1}{3}}+2^{\frac{1}{3}}}{2^{\frac{2}{3}}+2^{\frac{1}{3}}\cdot 2^{\frac{1}{3}}+2^{\frac{2}{3}}} = \frac{\sqrt[3]{4}}{3}\end{aligned}$$

□

ตัวอย่าง 85 กำหนดให้ $-x^2+2x+8\le f(x)\le 9$ สำหรับทุก $x\in\mathbb{R}\smallsetminus\{1\}$ จงหาค่าของ $\lim\limits_{x\to 1}f(x)$

วิธีทำ เนื่องจาก $\lim\limits_{x\to 1}(-x^2+2x+8) = -1^2+2(1)+8 = 9 = \lim\limits_{x\to 1}9$

ดังนั้น จะได้ว่า $\lim\limits_{x\to 1}f(x) = 9$ □

ตัวอย่าง 86 จงหาค่าของ $\lim\limits_{x\to 0} x^2\cos\frac{1}{x}$

วิธีทำ เนื่องจาก $-1 \le \cos\frac{1}{x} \le 1$ สำหรับทุก $x \in \mathbb{R}$ ซึ่ง $x \ne 0$

จะได้ว่า $-x^2 \le x^2\cos\frac{1}{x} \le x^2$ สำหรับทุก $x \in \mathbb{R}$ ซึ่ง $x \ne 0$

และ $\lim\limits_{x\to 0}(-x^2) = \lim\limits_{x\to 0} x^2 = 0$ จะได้ว่า $\lim\limits_{x\to 0} x^2\cos\frac{1}{x} = 0$ □