หน่วยที่ 1 เลขยกกำลัง
Unit 1 Exponents
บทนิยาม ทฤษฎี ตัวอย่าง และแบบฝึกหัด

สำหรับนักเรียน ระดับชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 5
รายวิชา ค 42101 (คณิตศาสตรพื้นฐาน 3)
ตามหลักสูตรการศึกษาขั้นพื้นฐาน พุทธศักราช 2544

ชื่อ - นามสกุล .... เลขที่...... ชั้น ......

โรงเรียนเทิงวิทยาคม อำเภอเทิง จังหวัดเชียงราย

เวลาเรียน วัน................................ชั่วโมงที่....................เรียนที่ห้อง.......................

วัน................................ชั่วโมงที่....................เรียนที่ห้อง.......................

ภาคเรียนที่ 1 ปีการศึกษา 2552

ครูผู้สอน : ครูอาหนึ่ง ชูไวย

กลุ่มสาระการเรียนรู้คณิตศาสตร์
โรงเรียนเทิงวิทยาคม
อำเภอเทิง จังหวัดเชียงราย

แบบบันทึกการส่งงาน

ครั้งที่	วัน/เดือน/ปี	รายการ	ลายมือชื่อครู	หมายเหตุ
1		ข้อมูลส่วนตัวผู้เรียน		
2		แบบฝึกหัดที่ 1.1		
3		แบบฝึกหัดที่ 1.2		
4		แบบฝึกหัดที่ 1.3		
5		แบบฝึกหัดที่ 1.4		
6		แบบฝึกหัดที่ 1.5		
7		แบบฝึกหัดที่ 1.6		
10		แบบฝึกหัดที่ 1.7-1		
11		แบบฝึกหัดที่ 1.7-2		
8		แบบฝึกหัดที่ 1.8		
9		แบบฝึกหัดที่ 1.9		
10		แบบฝึกหัดที่ 1.10-1		
11		แบบฝึกหัดที่ 1.10-2		
12		แบบฝึกหัดที่ 1.11-1		
13		แบบฝึกหัดที่ 1.11-2		
14		แบบฝึกหัดที่ 1.12-1		
14		แบบฝึกหัดที่ 1.12-2		
13		แบบฝึกหัดที่ 1.12-3		
15		แบบฝึกหัดที่ 1.13		
16		แบบฝึกหัดที่ 1.14		

ข้อมูลส่วนตัวผู้เรียน

1. ชื่อ - นามสกุล ....ชื่อเล่น ....เลขที่ ......ชั้น ......
2. วัน/เดือน/ปี เกิด ....
3. ที่อยู่ปัจจุบันที่สามารถติดต่อได้ ....
4. เบอร์โทรศัพท์ที่สามารถติดต่อได้ (ระบุความสัมพันธ์-ส่วนตัว-บิดา-มารดา-บุคคลอื่น) ....
5. *Email address* (ถ้ามี) ....
6. *hi5* (ถ้ามี) ....
7. คติประจำใจ ....
8. ความมุ่งหวังต่อรายวิชา ค 42101 ....

ภาพจิตนาการที่มีต่อวิชาคณิตศาสตร์ (*Mathematical Visualization*)

ด้วยความปรารถนาดีต่อศิษย์จากใจจริง

ครูอาหนึ่ง ชูไวย
มือถือ 086-0789183 (1-2 call)
Email address : jeng_r1@hotmail.com

คำนำ

การเรียนคณิตศาสตร์ให้ประสบความสำเร็จได้ดีนั้น ผู้ศึกษาจะต้องมีความรู้ความเข้าใจในพื้นฐานคณิตศาสตร์ มีทักษะการคิดและกระบวนการทางคณิตศาสตร์ อันได้แก่ ความรู้ ความสามารถในการแก้ปัญหาด้วยวิธีการที่หลากหลาย ตลอดจนมีความเข้าใจและรู้จักการใช้เหตุผล มีความคิดริเริ่มสร้างสรรค์ สามารถทำงานอย่างเป็นระบบ มีระเบียบวินัย มีความรอบคอบ และนำความรู้นั้นไปประยุกต์เชื่อมโยงกับศาสตร์อื่นๆได้เป็นอย่างดี**สิ่งที่สำคัญก็คือมีเจตคติที่ดีต่อวิชา คณิตศาสตร์**

ผู้เรียบเรียงขอมอบคุณความดีในการจัดทำเอกสารเล่มนี้แด่ครูอาจารย์ทุกท่านที่ประสิทธิ์ประสาทวิชาความรู้ คณะผู้บริหาร โรงเรียนเทิงวิทยาคมที่ส่งเสริมการพัฒนาผลงานด้านวิชาการ สถาบันส่งเสริมการสอนวิทยาศาสตร์และเทคโนโลยี(สสวท.) ที่มอบทุนการศึกษาโครงการ สควค. ให้ผู้เรียบเรียงตลอดระยะเวลา 5 ปี จนจบการศึกษา และน้อมเป็นเครื่องสักการะบูชาพระคุณแด่บิดามารดา และคุณยายต่อม ค้าแป้ง ผู้ล่วงลับที่เป็นกำลังใจให้ผู้เรียบเรียงตลอดมา

อนึ่ง หากมีข้อผิดพลาดหรือข้อเสนอแนะประการใดสำหรับเอกสารเล่มนี้ผู้เรียบเรียงยินดีรับฟังและจะแก้ไขต่อไป ขอขอบพระคุณมา ณ โอกาสนี้

อาหนึ่ง ชูไวย
กลุ่มสาระการเรียนรู้คณิตศาสตร์
โรงเรียนเทิงวิทยาคม
อำเภอเทิง จังหวัดเชียงราย

บูชาอาจาริยคุณแด่บูรพาจารย์คณิตศาสตร์

ข้าพเจ้าขอบมอบคุณความดีในครั้งนี้แด่บูรพาจารย์ทางคณิตศาสตร์ที่กรุณาเมตตาอบรมสั่งสอนให้ข้าพเจ้ามีความรู้แตกฉานทางคณิตศาสตร์ ขอน้อมยอกรอุทิศ น้อมจิตอธิษฐานในผลบุญกุศล อันเกิดจากการแต่งตำราแบบฝึกหัดประกอบการเรียนในครั้งนี้ นบเหนือเกล้าเป็นเครื่องบูชา สักการะคุณ แด่คุรุอุปัชชาย์ ครูอาจารย์ ซึ่งเป็นเสมือนปาจารย์ในหมู่ศิษย์ของข้าพเจ้า ดังมีรายนามต่อไปนี้ ด้วยความเคารพ รัก ศรัทธา และนับถือเทิดทูน

- คุณพ่อชิต ชูไวย
- คุณแม่ย้าย ชูไวย
- คุณยายต่อม ค้าแป้ง
- ศาสตราจารย์ ดร.บรรพต สุวรรณประเสริฐ
- ศาสตราจารย์ ดร.ณรงค์ ปั้นนิ่ม
- ศาสตราจารย์ ดร.สมยศ พลับเที่ยง
- Professor Dr. Yong-Gao Chen
- Professor Dr. Sheng Bau
- Professor Dr. Kause Denéke
- Professor Dr. Ping Zang
- Professor Dr. David A. Paris
- รองศาสตราจารย์ ดร.ปราโมทย์ มากชู
- รองศาสตราจารย์ ภัทรา เตชาภิวาทย์
- รองศาสตราจารย์ ปราโมทย์ ประเสริฐ
- รองศาสตราจารย์ ม.ล.จันทรศรี ชมพูนุท
- รองศาสตราจารย์ วิวรรธน์ วณิชาภิชาติ
- รองศาสตราจารย์ ดร.บุญญา เพียรสวรรค์
- รองศาสตราจารย์ ศรีวรรณ ฤกษ์ภิริทัต
- ผู้ช่วยศาสตราจารย์ ดร.มาโนชญ์ สิริพิทักษ์เดช
- ผู้ช่วยศาสตราจารย์ ดร.ชัยวัฒน์ นามนาค
- ผู้ช่วยศาสตราจารย์ ดร.นรินทร์ เพชรโรจน์
- Assistant Professor Dr. W.W.L. Chen
- Assistant Professor Dr. David A. Santos
- อาจารย์ ดร.ระเบียน วังคีรี
- อาจารย์ ดร.อัญชลีย์ แก้วเจริญ
- อาจารย์ สุภาพร สุขเสริญ
- อาจารย์ สมพร กล่ำเทศ
- ครูวิบูลย์ วิชชานุภาพ
- ครูศุภาภรณ์ จอมชาญพันธุ์
- ครูนิภาพร เขื่อนแก้ว
- ครูอัลจนา จินดารัตน์
- ครูปรีชา จันทกาญน์
- ครูศุภลักษณ์ ก้างออนตา
- ครูตุลาพร แสนธิ
- ครูประสาน คันธเรศ
- ครูสุพรรณ์ ธนะหมอก
- ครูนิวัตร คำดอน
- ครูยุพิณ คำดอน
- ครูอดิศัย ธรรมโชติ
- ครูคนึง ธรรมโชติ
- ครูพิมพ์ ค้ากำยาน
- ครูสุวิทย์ แก้วอินทร์
- ครูสุข จันทวีชัย
- ครูจวงจันทร์ จันทร์ทิมา

สารบัญ

สาระการเรียนรู้ประจำหน่วย

1. สมบัติของเลขยกกำลัง
2. การดำเนินการของเลขยกกำลัง
3. รากที่ n ของจำนวนจริง
4. เลขยกกำลังที่มีเลขชี้กำลังเป็นจำนวนตรรกยะ

ผลการเรียนรู้ที่คาดหวัง

1. มีความคิดรวบยอดเกี่ยวกับจำนวนจริงที่อยู่ในรูปเลขยกกำลังที่มีเลขชี้กำลังเป็นจำนวนตรรกยะ และจำนวนจริงในรูปกรณฑ์
2. เข้าใจความหมายและหาผลลัพธ์ที่เกิดจาก การบวก การลบ การคูณ การหารจำนวนจริงที่อยู่ในรูปเลขยกกำลังที่มีเลขชี้กำลังเป็นจำนวนตรรกยะ และจำนวนจริงที่อยู่ในรูปกรณฑ์
3. หาค่าประมาณของจำนวนที่อยู่ในรูปกรณฑ์และจำนวนที่อยู่ในรูปเลขยกกำลังโดยใช้วิธีคำนวณที่เหมาะสม

หน่วยที่ 1 เลขยกกำลัง

1 สมบัติของเลขยกกำลัง

1.1 ทบทวนสัญลักษณ์ต่างๆเกี่ยวกับเซต

สัญลักษณ์แทนเซต

$\mathbb{C}$	แทน	เซตของจำนวนเชิงซ้อน (complex numbers)
$\mathbb{R}$	แทน	เซตของจำนวนจริง (real numbers)
$\mathbb{R}^+$	แทน	เซตของจำนวนจริงบวก (positive real numbers)
$\mathbb{R}^-$	แทน	เซตของจำนวนจริงลบ (negative real numbers)
$\mathbb{Q}$	แทน	เซตของจำนวนตรรกยะ (rational numbers) $= \{r \mid r = \frac{m}{n}, n \neq 0, m, n \in \mathbb{Z}\}$
$\mathbb{Q}'$	แทน	เซตของจำนวนอตรรกยะ (irrational numbers)
$\mathbb{I}$ หรือ $\mathbb{Z}$	แทน	เซตของจำนวนเต็ม (integers) $= \{\ldots, -3, -2, -1, 0, 1, 2, 3, \ldots\}$
$\mathbb{I}^+$ หรือ $\mathbb{Z}^+$	แทน	เซตของจำนวนเต็มบวก (positive integers) = {1,2,3,...}
$\mathbb{I}^-$ หรือ $\mathbb{Z}^-$	แทน	เซตของจำนวนเต็มลบ (negative integers) = {...,-3,-2,-1}
$\mathbb{I}^0$ หรือ $\mathbb{Z}^0$	แทน	เซตของจำนวนเต็มศูนย์ $= \{0\}$
$\mathbb{N}$	แทน	เซตของจำนวนนับ หรือ จำนวนธรรมชาติ (counting nubers or natural numbers) $= \{1, 2, 3, \ldots\}$ หรือ $\{0, 1, 2, 3, \ldots\}$ แล้วแต่การนิยามของผู้ใช้
$\mathbb{P}$	แทน	เซตของจำนวนเฉพาะ (prime numbers) $= \{p \mid p \in \mathbb{Z}$ เมื่อ $p \neq 1, 1 \mid p$ และ $p \mid p\}$
$\emptyset$ หรือ $\{\}$	แทน	เซตว่าง (empty set or null set or void set) ; $\emptyset = X, n(X) = 0$
$\mathcal{U}$	แทน	เซตของเอกภพสัมพัทธ์ (universal set)
$\mathcal{P}(A)$	แทน	เพาเวอร์เซต (power set) ของ A
$n(A)$	แทน	จำนวนสมาชิกของ A

สัญลักษณ์แทนการดำเนินการ

$\in$ หรือ $\ni$	แทน	เป็นสมาชิก
$\notin$ หรือ $\not\ni$	แทน	ไม่เป็นสมาชิก
$\subset$ หรือ $\subseteq$	แทน	เป็นสับเซต
$\supset$ หรือ $\supseteq$	แทน	เป็นสับเซต
$\not\subset$ หรือ $\not\subseteq$	แทน	ไม่เป็นสับเซต
$\not\supset$ หรือ $\not\supseteq$	แทน	ไม่เป็นสับเซต
$\cup$	แทน	ยูเนียน (union) ; $A \cup B = \{x \mid x \in A$ หรือ $x \in B\}$
$\cap$	แทน	อินเตอร์เซกชัน (intersection) ; $A \cap B = \{x \mid x \in A$ และ $x \in B\}$
$A - B$	แทน	ผลต่าง (difference) ของ A กับ B ; $A - B = \{x \mid x \in A$ แต่ $x \notin B\}$
A' หรือ A^c	แทน	คอมพลีเมนต์ (complement) ของ A ; $A' = \mathcal{U} - A = \{x \mid x \in \mathcal{U}$ แต่ $x \notin A\}$

1.2 ทบทวนความรู้เบื้องต้น

1. $\mathbb{R} = \mathbb{Q} \cup \mathbb{Q}'$

2. $\mathbb{Q} \cap \mathbb{Q}' = \emptyset$

3. $\mathbb{R}^+ \cap \mathbb{R}^- = \emptyset$

4. $\mathbb{Z}^+ \cap \mathbb{Z}^- = \emptyset$

5. จำนวนเต็ม(integers) คือ จำนวนที่ไม่อยู่ในรูปเศษส่วน(fraction)และทศนิยม (decimal) ประกอบด้วย $\boxed{\ldots,-3,-2,-1,0,1,2,3,\ldots}$ (นั่นคือ ไม่มีจำนวนเต็มที่น้อยที่สุดและไม่มีจำนวนเต็ม ที่มากที่สุด)

$\mathbb{Z} = \mathbb{Z}^- \cup \mathbb{Z}^0 \cup \mathbb{Z}^+$ และ $\mathbb{Z}$ เป็นเซตอนันต์

6. จำนวนเต็มลบ(negaitive integers) ประกอบด้วย $\boxed{\ldots,-3,-2,-1}$ (นักเรียนจะสังเกตได้ว่าจำนวนเต็มลบที่มากที่สุด คือ $\boxed{-1}$ แต่ไม่มีจำนวนเต็มลบที่น้อยที่สุด เนื่องจากจำนวนเต็มลบจำนวนถัดไปจะมีค่าลดลงจากจำนวนก่อนหน้าครั้งละ 1 เสมอ)

$x_{max} \in \mathbb{Z}^- = -1$ แต่ ไม่มี $x_{min} \in \mathbb{Z}^-$ และ $\mathbb{Z}^-$ เป็นเซตอนันต์

7. จำนวนเต็มศูนย์ (zero) มีเพียงตัวเดียวเท่านั้น คือ $\boxed{0}$ (นั่นคือ จำนวนเต็มศูนย์ ไม่เป็นจำนวนเต็มลบและไม่เป็นจำนวนเต็มบวก)

$\mathbb{Z}^0$ เป็นเซตจำกัด

8. จำนวนเต็มบวก(positive integers) ประกอบด้วย $\boxed{1,2,3,\ldots}$ (นักเรียนจะสังเกตได้ว่าจำนวนเต็มบวกที่น้อยที่สุด คือ $\boxed{1}$ แต่ไม่มีจำนวนเต็มบวกที่มากที่สุด เนื่องจากจำนวนเต็มบวกจำนวนถัดไปจะมีค่าเพิ่มขึ้นจากจำนวนก่อนหน้าครั้งละ 1 เสมอ)

ไม่มี $x_{max} \in \mathbb{Z}^+$ แต่ $x_{min} \in \mathbb{Z}^+ = 1$ และ $\mathbb{Z}^+$ เป็นเซตอนันต์

9. จำนวนเต็มที่ไม่ใช่จำนวนเต็มลบ คือ $\boxed{0, 1, 2, 3, \ldots}$ (นั่นคือ จำนวนเต็มที่ไม่ใช่จำนวนเต็มลบเป็นจำนวนที่รวมจำนวนเต็มศูนย์กับจำนวนเต็มบวกไว้ด้วยกัน)

เซตของจำนวนเต็มที่ไม่ใช่จำนวนเต็มลบ คือ $\{0\} \cup \mathbb{Z}^+$

10. จำนวนเต็มที่ไม่ใช่จำนวนเต็มบวก คือ $\boxed{\ldots, -3, -2, -1, 0}$ (นั่นคือจำนวนเต็มที่ไม่ใช่จำนวนเต็มบวกเป็นจำนวนที่รวมจำนวนเต็มศูนย์กับจำนวนเต็มลบไว้ด้วยกัน)

เซตของจำนวนเต็มที่ไม่ใช่จำนวนเต็มบวก คือ $\mathbb{Z}^- \cup \{0\}$

11. จำนวนเต็มคู่ คือ จำนวนที่ 2 หารลงตัว (จำนวนที่หารด้วย 2 แล้ว ไม่มีเศษ หรือ เศษเป็น 0)
ถ้า x เป็นจำนวนเต็มคู่ แล้ว $2|x$ เช่น $2, 4, 6, \ldots, 2n$ โดยที่ $n \in \mathbb{Z}$

เซตของจำนวนเต็มคู่ คือ $\{x|x = 2n, n \in \mathbb{Z}\}$

12. จำนวนเต็มคี่ คือ จำนวนที่ 2 หารไม่ลงตัว และเหลือเศษเป็น 1
ถ้า x เป็นจำนวนเต็มคี่ แล้ว $2 \nmid x$ เช่น $1, 3, 5, \ldots, 2n+1$ หรือ $2n-1$ โดยที่ $n \in \mathbb{Z}$

เซตของจำนวนเต็มคี่ คือ $\{x|x = 2n+1, n \in \mathbb{Z}\}$

เซตของจำนวนเต็มคี่ คือ $\{x|x = 2n-1, n \in \mathbb{Z}\}$

13. สมบัติไตรวิภาค (trichotomy properties) กล่าวว่า จำนวนเต็ม a ต้องเป็นจำนวนเต็มประเภทใดประเภทหนึ่ง ใน 3 กรณีต่อไปนี้ เพียงอย่างเดียวเท่านั้น คือ

- $a < 0$ (a ต้องเป็นจำนวนเต็มลบเพียงอย่างเดียวเท่านั้น) หรือ
- $a = 0$ (a ต้องเป็นจำนวนเต็มศูนย์เพียงอย่างเดียวเท่านั้น) หรือ
- $a > 0$ (a ต้องเป็นจำนวนเต็มบวกเพียงอย่างเดียวเท่านั้น)

14. กำหนดให้ a, b และ c เป็นจำนวนเต็มใดๆ จะได้ว่า

- $a + b$ เป็นจำนวนเต็ม (จำนวนเต็มบวกกับจำนวนเต็มได้ผลลัพธ์เป็นจำนวนเต็ม) (สมบัติปิดการบวก) (additive closure property)
- $a \times b$ เป็นจำนวนเต็ม (จำนวนเต็มคูณกับจำนวนเต็มได้ผลลัพธ์เป็นจำนวนเต็ม) (สมบัติปิดการคูณ) (multiplicative closure property)
- ถ้า $a > 0$ และ $b > 0$ แล้ว $a + b > 0$
- ถ้า $a < 0$ และ $b < 0$ แล้ว $a + b < 0$
- $|a|$ (อ่านว่าค่าสัมบูรณ์ของ a) คือ ระยะห่างจาก a ถึง 0 มีค่าเป็นศูนย์ หรือมีค่าเป็นบวกเสมอ (เพราะระยะไม่ติดลบ)
  $\boxed{|a| = \begin{cases} a & \text{เมื่อ } a \geq 0 \\ -a & \text{เมื่อ } a < 0 \end{cases}}$ นั่นคือ $|a| \geq 0$ เสมอ
- ถ้า $a > 0$ และ $b < 0$ และ $|a| > |b|$ แล้ว $a + b > 0$
- ถ้า $a > 0$ และ $b < 0$ และ $|a| < |b|$ แล้ว $a + b < 0$
- ถ้า $a > b$ แล้ว $a + c > b + c$
- ถ้า $a > b$ และ $c > 0$ แล้ว $ac > bc$
- ถ้า $a > b$ และ $c < 0$ แล้ว $ac < bc$
- ถ้า $a < b$ และ $b < c$ แล้ว $a < c$ (สมบัติการถ่ายทอด (transitive property))
- ถ้า $a > b$ และ $b > c$ แล้ว $a > c$ (สมบัติการถ่ายทอด (transitive property))
- ถ้า $a = b$ และ $b = c$ แล้ว $a = c$ (สมบัติการถ่ายทอด (transitive property))
- $a = a$ (สมบัติการสะท้อน (reflexive property))

- ถ้า $a = b$ แล้ว $b = a$ (สมบัติการสมมาตร (symmetry property))
- $a \times 0 = 0$ (ทุกๆ จำนวนเต็มคูณกับศูนย์ แล้วได้ผลลัพธ์เป็นศูนย์)
- ถ้า $a > b$ และ $c = 0$ แล้ว $ac = bc$ หรือ ถ้า $a < b$ และ $c = 0$ แล้ว $ac = bc$
- $a + (-a) = 0$ เรียก $\boxed{-a \text{ ว่า "อินเวอร์สการบวกของ } a\text{"}}$
- $a \times \frac{1}{a} = 1$ เรียก $\boxed{\frac{1}{a} \text{ ว่า "อินเวอร์สการคูณของ } a\text{"}}$
- $a + 0 = a$ เรียก $\boxed{0 \text{ ว่า "เอกลักษณ์การบวกของทุกจำนวนเต็ม"}}$
- $a \times 1 = a$ เรียก $\boxed{1 \text{ ว่า "เอกลักษณ์การคูณของทุกจำนวนเต็ม"}}$
- $a + b = b + a$ (สมบัติการสลับที่การบวก (additive commutative property))
- $a \times b = b \times a$ (สมบัติการสลับที่การคูณ (multiplicative commutative property))
- $(a + b) + c = a + (b + c)$ (สมบัติการเปลี่ยนกลุ่มการบวก (additive associative property))
- $(a \times b) \times c = a \times (b \times c)$ (สมบัติการเปลี่ยนกลุ่มการบวก (multiplicative associative property))
- $a \times (b + c) = (a \times b) + (a \times c)$ (สมบัติการกระจาย (distributive property))

15. จำนวนตรงข้ามของ a คือ $-a$
16. $a \times b$ (a cross b) สามารถเขียนให้อยู่ในรูป $a \cdot b$ (a dot b) หรือ ab
17. $a \div b$ สามารถเขียนให้อยู่ในรูป $\frac{a}{b}$ โดยที่ $b \neq 0$
18. $a - b = a + (-b)$ (การลบ คือ การบวกด้วยจำนวนตรงข้าม)
19. **จำนวนตรรกยะ** + **จำนวนตรรกยะ** ได้ผลลัพธ์เป็น **จำนวนตรรกยะ**
20. **จำนวนตรรกยะ** + **จำนวนอตรรกยะ** ได้ผลลัพธ์เป็น **จำนวนอตรรกยะ**
21. **จำนวนอตรรกยะ** + **จำนวนตรรกยะ** ได้ผลลัพธ์เป็น **จำนวนอตรรกยะ**
22. **จำนวนอตรรกยะ** + **จำนวนอตรรกยะ** ได้ผลลัพธ์เป็น **จำนวนตรรกยะ** หรือ **จำนวนอตรรกยะ** ก็ได้
23. **จำนวนตรรกยะ** × **จำนวนตรรกยะ** ได้ผลลัพธ์เป็น **จำนวนตรรกยะ**
24. **จำนวนตรรกยะ** × **จำนวนอตรรกยะ** ได้ผลลัพธ์เป็น **จำนวนอตรรกยะ** โดยที่ จำนวนตรรกยะต้อง $\neq 0$
25. **จำนวนอตรรกยะ** × **จำนวนตรรกยะ** ได้ผลลัพธ์เป็น **จำนวนอตรรกยะ** โดยที่ จำนวนตรรกยะต้อง $\neq 0$

26. **จำนวนอตรรกยะ** $\times$ **จำนวนอตรรกยะ** ได้ผลลัพธ์เป็น **จำนวนตรรกยะ** หรือ **จำนวนอตรรกยะ** ก็ได้

27. **จำนวนเต็มบวก** $\times$ **จำนวนเต็มบวก** ได้ผลลัพธ์เป็น **จำนวนเต็มบวก**

28. **จำนวนเต็มบวก** $\times$ **จำนวนเต็มลบ** ได้ผลลัพธ์เป็น **จำนวนเต็มลบ**

29. **จำนวนเต็มลบ** $\times$ **จำนวนเต็มบวก** ได้ผลลัพธ์เป็น **จำนวนเต็มลบ**

30. **จำนวนเต็มลบ** $\times$ **จำนวนเต็มลบ** ได้ผลลัพธ์เป็น **จำนวนเต็มบวก**

1.3 สมบัติของเลขยกกำลัง (ช่วงชั้นที่ 3)

สำหรับจำนวนจริง a, b ใดๆ และ สำหรับทุกค่า m, n ที่เป็นจำนวนเต็มบวก

1. $a^n = \underbrace{a \times a \times \ldots \times a}_{n \text{ ตัว}}$

   เรียก

   - a^n ว่า “เลขยกกำลัง”
   - a ว่า “ฐาน”
   - n ว่า “เลขชี้กำลัง”

2. $a^0 = 1$

3. 0^0 ไม่นิยาม (ในระดับชั้นนี้ หมายถึง ไม่มีความหมายทางคณิตศาสตร์)

4. $a^{-n} = \dfrac{1}{a^n}$ และ $a \neq 0$

5. $a^m \times a^n = a^{m+n}$

6. $\dfrac{a^m}{a^n} = a^{m-n}$ เมื่อ $a \neq 0$

7. $(a \times b)^n = a^n \times b^n$

8. $\left(\dfrac{a}{b}\right)^n = \dfrac{a^n}{b^n}$ เมื่อ $b \neq 0$

ตัวอย่าง 1. ค่าของ $3^6 = \underbrace{3 \times 3 \times 3 \times 3 \times 3 \times 3}_{6 \text{ ตัว}}$

ตัวอย่าง 2. ค่าของ $2^5 = \underbrace{2 \times 2 \times 2 \times 2 \times 2}_{5\text{ ตัว}}$

ตัวอย่าง 3. ค่าของ $18^{100} = \underbrace{18 \times 18 \times \ldots \times 18}_{100\text{ ตัว}}$

ตัวอย่าง 4. ค่าของ $5^{-4} = \frac{1}{5^4} = \underbrace{\frac{1}{5} \times \frac{1}{5} \times \frac{1}{5} \times \frac{1}{5}}_{4\text{ ตัว}}$

ตัวอย่าง 5. ค่าของ $6^{-300} = \frac{1}{6^{300}} = \underbrace{\frac{1}{6} \times \frac{1}{6} \times \ldots \times \frac{1}{6}}_{300\text{ ตัว}}$

ตัวอย่าง 6. ค่าของ $(-7)^6 = \underbrace{(-7) \times (-7) \times (-7) \times (-7) \times (-7) \times (-7)}_{6\text{ ตัว}}$

ตัวอย่าง 7. ค่าของ $(-2)^{-8} = \frac{1}{(-2)^8} = \underbrace{\frac{1}{-2} \times \frac{1}{-2} \times \frac{1}{-2} \times \frac{1}{-2} \times \frac{1}{-2} \times \frac{1}{-2} \times \frac{1}{-2} \times \frac{1}{-2}}_{8\text{ ตัว}}$

ตัวอย่างเพิ่มเติม (กรณีที่ฐานของเลขยกกำลังไม่เป็นจำนวนเต็ม)

ตัวอย่าง 8. ค่าของ $(0.1)^6 = \underbrace{(0.1) \times (0.1) \times (0.1) \times (0.1) \times (0.1) \times (0.1)}_{6\text{ ตัว}}$

ตัวอย่าง 9. ค่าของ $(0.1)^{-6} = \frac{1}{(0.1)^6} = \underbrace{\left(\frac{1}{0.1}\right) \times \left(\frac{1}{0.1}\right) \times \left(\frac{1}{0.1}\right) \times \left(\frac{1}{0.1}\right) \times \left(\frac{1}{0.1}\right) \times \left(\frac{1}{0.1}\right)}_{6\text{ ตัว}}$

ตัวอย่าง 10. ค่าของ $(-0.5)^4 = \underbrace{(-0.5) \times (-0.5) \times (-0.5) \times (-0.5)}_{4\text{ ตัว}}$

ตัวอย่าง 11. ค่าของ $(-0.5)^{-4} = \frac{1}{(-0.5)^4} = \underbrace{\left(\frac{1}{-0.5}\right) \times \left(\frac{1}{-0.5}\right) \times \left(\frac{1}{-0.5}\right) \times \left(\frac{1}{-0.5}\right)}_{4\text{ ตัว}}$

ตัวอย่าง 12. ค่าของ $\left(\frac{4}{7}\right)^5 = \underbrace{\frac{4}{7} \times \frac{4}{7} \times \frac{4}{7} \times \frac{4}{7} \times \frac{4}{7}}_{5\text{ ตัว}}$

ตัวอย่าง 13. ค่าของ $\left(\frac{2}{3}\right)^{-4} = \frac{1}{\left(\frac{2}{3}\right)^4} = \underbrace{\frac{1}{\left(\frac{2}{3}\right)} \times \frac{1}{\left(\frac{2}{3}\right)} \times \frac{1}{\left(\frac{2}{3}\right)} \times \frac{1}{\left(\frac{2}{3}\right)}}_{4\text{ ตัว}} = \underbrace{\frac{3}{2} \times \frac{3}{2} \times \frac{3}{2} \times \frac{3}{2}}_{4\text{ ตัว}}$

นักเรียนควรทราบ 1 สำหรับทุกจำนวนเต็ม a ใดๆ ที่ $b \neq 0$ จะได้ว่า $\frac{-a}{b} = -\frac{a}{b} = \frac{a}{-b}$

นักเรียนควรทราบ 2 สำหรับทุกจำนวนเต็ม a ใดๆ และทุกจำนวนเต็มบวก n พึงระวัง $-a^n = -(a^n)$

เพื่อง่ายต่อการทำความเข้าใจ และกันความสับสน ให้นักเรียนพิจารณาตัวอย่างต่อไปนี้

ตัวอย่าง 14. ค่าของ $-5^7 = -(5^7) = \underbrace{-(5 \times 5 \times 5 \times 5 \times 5 \times 5 \times 5)}_{7 \text{ ตัว}}$

แต่

ตัวอย่าง 15. ค่าของ $(-5)^7 = \underbrace{(-5) \times (-5) \times (-5) \times (-5) \times (-5) \times (-5) \times (-5)}_{7 \text{ ตัว}}$

นักเรียนควรทราบ 3 สำหรับทุกจำนวนเต็ม a, b ใดๆ ที่ $b \neq 0$ จะได้ว่า $\frac{-a}{b} = -\frac{a}{b} = \frac{a}{-b}$

นักเรียนควรทราบ 4 สำหรับทุกจำนวนเต็ม a, b, c, d ใดๆ ที่ $b, c, d \neq 0$ จะได้ว่า $\left(\frac{\frac{a}{b}}{\frac{c}{d}}\right) = \frac{a}{b} \times \frac{d}{c} = \frac{a \times d}{b \times c}$

นั่นคือ $\left(\frac{\frac{a}{b}}{\frac{c}{d}}\right) = \frac{a}{b} \times \frac{d}{c} = \frac{a \times d}{b \times c}$; **กลับเศษเป็นส่วน เปลี่ยนหารเป็นคูณ ส่วนเป็น** 0 **ไม่มีความหมาย**

ตัวอย่าง 16. ค่าของ $5^0 = 1$

ตัวอย่าง 17. ค่าของ $(-7)^0 = 1$

ตัวอย่าง 18. ค่าของ $(0.25)^0 = 1$

ตัวอย่าง 19. ค่าของ $(-0.00125)^0 = 1$

ตัวอย่าง 20. ค่าของ $(\frac{8}{13})^0 = 1$

ตัวอย่าง 21. ค่าของ $\left(-\frac{7}{11}\right)^0 = 1$

นักเรียนควรทราบ 5 สำหรับทุกจำนวนเต็ม a ใดๆ จะได้ว่า $\frac{a}{0}$ ไม่มีความหมาย

นักเรียนควรทราบ 6 สำหรับทุกจำนวนเต็ม a ใดๆ ที่ $a \neq 0$ จะได้ว่า $\frac{0}{a} = 0$

ตัวอย่าง 22. ค่าของ
$$\begin{cases} \dfrac{0}{0} & \text{ไม่มีความหมาย หรือ ไม่นิยาม} \\ \dfrac{2}{0} & \text{ไม่มีความหมาย หรือ ไม่นิยาม} \\ \dfrac{-3}{0} & \text{ไม่มีความหมาย หรือ ไม่นิยาม} \\ \dfrac{\left(\frac{1}{2}\right)}{0} & \text{ไม่มีความหมาย หรือ ไม่นิยาม} \\ \dfrac{\left(-\frac{2}{3}\right)}{0} & \text{ไม่มีความหมาย หรือ ไม่นิยาม} \\ \dfrac{1.25}{0} & \text{ไม่มีความหมาย หรือ ไม่นิยาม} \\ \dfrac{-0.000012456}{0} & \text{ไม่มีความหมาย หรือ ไม่นิยาม} \end{cases}$$

ตัวอย่าง 23. ค่าของ
$$\begin{cases} \dfrac{0}{2} & = 0 \\ \dfrac{0}{-3} & = 0 \\ \dfrac{0}{0.222} & = 0 \\ \dfrac{0}{-1.28} & = 0 \\ \dfrac{0}{\left(-\frac{2}{3}\right)} & = 0 \\ \dfrac{0}{1.25} & = 0 \\ \dfrac{0}{-0.00157} & = 0 \end{cases}$$

ตัวอย่าง 24. ค่าของ $(-5)^2 \times (-5)^7 = (-5)^{2+7} = (-5)^9$

ตัวอย่าง 25. ค่าของ $(-2)^9 \div (-2)^7 = (-2)^{9-7} = (-2)^2 = (-2) \times (-2) = 4$

คำถาม 26. จงหาค่าของ $128 \times 2^5 \times 2^{-4}$

คำถาม 27. จงหาค่าของ $\dfrac{7^0 \times 7^{-6} \times 7^8}{(-7)^4 \times 7^2}$

จากคำถามที่ 27 นักเรียนทราบว่า
1. จำนวนเต็มลบคูณกันคี่ตัว ได้ผลลัพธ์เป็น ....
2. จำนวนเต็มลบคูณกันคู่ตัว ได้ผลลัพธ์เป็น ....

คำถาม 28. จงหาค่าของ $32 \times 2^7 \times (-2)^{-5}$

คำถาม 29. จงหาค่าของ $(3^{7x} \times 3^{4x}) \div (3^0 \times 3^{5x})$ เมื่อ x เป็นจำนวนเต็มบวก

คำถาม 30. จงหาค่าของ $\left((y^7 \times y^4) \div (y^0 \times y^{11})\right)^5$ เมื่อ y เป็นจำนวนเต็มบวก

คำถาม 31. จงหาค่าของ $-\left(\dfrac{13x^9}{65x^7}\right)$ เมื่อ x เป็นจำนวนเต็ม และ $x \neq 0$

1.4 แบบฝึกหัดที่ 1.1

คำสั่ง จงเขียนจำนวนต่อไปนี้ในรูปผลคูณของเลขยกกำลัง

ตัวอย่าง $4^6 = 4 \times 4 \times 4 \times 4 \times 4 \times 4$

1. $3^5 =$ ....
2. $-4^6 =$ ....
3. $(-2)^6 =$ ....
4. $-(-3)^4 =$ ....
5. $4^{-2} =$ ....
6. $-3^{-5} =$ ....
7. $(x^4)^3 =$ ....
8. $(2a^5)^4 =$ ....
9. $(0.2009)^5 =$ ....
10. $(0.2552)^{-6} =$ ....
11. $(-3)^{-7} =$ ....
12. $\left(2\frac{5}{8}\right)^4 =$ ....
13. $\left(-4\frac{1}{3}\right)^{-3} =$ ....
14. $\left(-\frac{2}{3}\right)^5 =$ ....
15. $-\left(\left(\frac{2}{7}\right)^4\right) =$ ....
16. $-\left(\left(\frac{2a}{3}\right)^{-5}\right) =$ ....

1.5 แบบฝึกหัดที่ 1.2

คำสั่ง จงหาผลลัพธ์จำนวนต่อไปนี้ในรูปเลขยกกำลัง

1. $2^4 \times 2^0 \times 2^8$

   ....
   ....
   ....
   ....
   ....

2. $3^7 \times 3^{-5} \times 3^{-2}$

   ....
   ....
   ....
   ....
   ....

3. $(-3)^8 \times (-3)^4 \times (-3)^{-5}$

   ....
   ....
   ....
   ....
   ....

4. $-27 \times (-3)^0 \times (-3)^{-6}$

   ....
   ....
   ....
   ....
   ....

5. $128 \times 2^{10} \times (-2)^{-5}$

   ....
   ....
   ....
   ....
   ....

6. $\left(\frac{1}{4}\right)^2 \times (0.25)^0 \times \left(\frac{3}{12}\right)^{-4}$

   ....
   ....
   ....
   ....
   ....

7. $x^{-4} \times x^{12} \times x^0$ เมื่อ $x \neq 0$

   ....
   ....
   ....
   ....
   ....

8. $5^{3n} \times 5^0 \times 5^{-n}$ เมื่อ n แทนจำนวนเต็มบวก

   ....
   ....
   ....
   ....
   ....

9. $4^{-2n} \times 4^0 \times 4^{2-n}$ เมื่อ n แทนจำนวนเต็มบวก

   ....
   ....
   ....
   ....
   ....

10. $2^{4n} \times 2^{8n+1} \times 2^{-2n}$ เมื่อ n แทนจำนวนเต็มบวก

    ....
    ....
    ....
    ....
    ....

นักเรียนควรทราบ 7 ค่าของ $x_1^{x_2^{x_3^{\cdot^{\cdot^{\cdot^{x_n}}}}}} = x_1^{\left(x_2^{\left(x_3^{\left(\cdot^{\left(\cdot^{\left(x_n\right)}\right)}\right)}\right)}\right)}$ โดยที่แต่ละ $x_i \neq 0, i = 1, 2, 3, \ldots$

ตัวอย่าง 32. ค่าของ $2^{3^2} = 2^{(3^2)} = 2^{(3\times3)} = 2^9 = 2\times2\times2\times2\times2\times2\times2\times2\times2 = 512$

ตัวอย่าง 33. ค่าของ $100^{10^{10000^{0^{1^{100}}}}} = 100^{\left(10^{\left(10000^{\left(0^{\left(1^{100}\right)}\right)}\right)}\right)} = 100^{\left(10^{\left(10000^{\left(0^1\right)}\right)}\right)} = 100^{\left(10^{\left(10000^0\right)}\right)}$
$= 100^{\left(10^1\right)} = 100^{10}$

1.6 แบบฝึกหัดที่ 1.3

คำสั่ง จงหาผลลัพธ์จำนวนต่อไปนี้ในรูปเลขยกกำลัง

ตัวอย่าง $2^{3^2} = 2^{(3^2)} = 2^9$

1. $2^{2^2} =$ ....

2. $3^{1^{3^{8^{0^9}}}} =$ ....

3. $4^{2^{4^{0^{20^1}}}} =$ ....

4. $6^{7^{0^{6^{12}}}} =$ ....

5. $10^{2^{10^0}} =$ ....

6. $2^{2^{2^2}} =$ ....

7. $3^{2^{3^2}} =$ ....

8. $5^{2^{1^{5}}} = \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$

9. $10^{10^{2^{100^{0^{10}}}}} = \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$

10. $10^{10^{1000^{0^{1^{100}}}}} = \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$

นักเรียนควรสังเกต $\dfrac{a^m}{a^n} = \begin{cases} a^{m-n} & \text{เมื่อ } m > n \\ a^0 = 1 & \text{เมื่อ } m = n \\ \dfrac{1}{a^{n-m}} & \text{เมื่อ } n > m \end{cases}$ โดยที่ $a \neq 0$ และ m, n เป็นจำนวนเต็มบวก

1.7 แบบฝึกหัดที่ 1.4

คำสั่ง จงหาผลลัพธ์จำนวนต่อไปนี้ในรูปเลขยกกำลัง

1. $\dfrac{(3^2 \times 5^7)^0 \times 2^{10}}{2^{-3} \times 2^7}$

....
....
....
....

2. $\dfrac{3x^{-4}y^4}{4x^6y^5}$ เมื่อ $x, y \neq 0$

....
....
....
....

3. $\dfrac{5^3 \times 25 \times 5}{(5^2)^2}$

....
....
....
....

4. $\dfrac{(4^3)^2}{(256)^2}$

....
....
....
....

5. $\dfrac{(2^4)^2 \times 8}{2^4 \times 2^6}$

....
....
....
....

6. $\dfrac{2^{-7} \times 2^3 \times (2^3)^2}{2^{-6} \times 2^{-2}}$

....
....
....
....

7. $\left(\dfrac{2^5 \times 2^3 \times 16}{2^{-6} \times 2^4 \times 8}\right)^2$

....
....
....
....

8. $\left(\dfrac{2^0 \times 3^5 \times 4^{-3}}{5^{-1} \times 6^6}\right)^2 \times \left(\dfrac{5^5 \times 6^{-1}}{2^3 \times 3^{-2} \times 4^3}\right)^3$

....
....
....
....

1.8 คำนำหน้าหน่วย

ในทางคณิตศาสตร์และวิทยาศาสตร์ได้กำหนด **คำนำหน้าหน่วย** หรือ **คำอุปสรรค** ขึ้นมาเพื่อให้เกิดความสะดวกต่อการนำไปใช้ โดยเขียนในรูป $A \times 10^n$, n เป็นจำนวนเต็มใดๆ ดังนี้

รูปแบบ	คำนำหน้าหน่วย หรือ คำอุปสรรค (SI's prefixes)	
10^n	ชื่อ	สัญลักษณ์
10^{-24}	ยอกโต (yocto)	y
10^{-21}	เซพโต (septo)	z
10^{-18}	อัตโต (atto)	a
10^{-15}	เฟมโต (femto)	f
10^{-12}	พิโก (pico)	p
10^{-9}	นาโน (nano)	n
10^{-6}	ไมโคร (micro)	μ
10^{-3}	มิลลิ (milli)	m
10^{-2}	เซนติ (centi)	c
10^{-1}	เดซิ (deci)	d
10^{1}	เดคา (deca)	da
10^{2}	เฮกโต (hecto)	h
10^{3}	กิโล (kilo)	k
10^{6}	เมกกะ (mega)	M
10^{9}	จิกะ (giga)	G
10^{12}	เทระ (tera)	T
10^{15}	เพตะ (peta)	P
10^{18}	เอกซะ (exa)	E
10^{21}	เซตตะ (zetta)	Z
10^{24}	ยอตตะ (yotta)	Y

คำนำหน้าหน่วยต่อไปนี้ ใช้เขียนนำหน้าหน่วยฐาน[1] (base unit) และ หน่วยอนุพทธ์[2] (derived unit) ของระบบวัดนานาชาติ (Système International d'unités : SI units)

หมายเหตุ

1. คำนำหน้านาม บางทีเราจะเรียกว่า **ตัวพหุคูณ(Multiple)**

2. การใช้คำนำหน้าหน่วยแต่ละคำควรใช้ครั้งเดียว ไม่นิยมเขียนคำนำหน้าหน่วยซ้ำกัน เช่น 1×10^{-12} เมตร อ่านว่า 1 พิโกเมตร ไม่นิยมอ่าน 1 มิลลินาโนเมตร($\because 10^{-12} = 10^{-3} \times 10^{-9}$) หรือ 1 ไมโครไมโครเมตร ($\because 10^{-12} = 10^{-6} \times 10^{6}$)

3. นักเรียนได้ศึกษาหน่วยฐานของระบบ SI บางหน่วย ในระดับชั้น ม.2 ของรายวิชาคณิตศาสตร์พื้นฐาน (ค 32101) บทที่ 2 มาแล้ว

[1]นักเรียนจะได้เรียนในวิชาวิทยาศาสตร์
[2]นักเรียนจะได้เรียนในวิชาวิทยาศาสตร์

2 การดำเนินการของเลขยกกำลัง

2.1 การคูณเลขยกกำลัง

นักเรียนเคยทราบมาแล้วว่า เมื่อแทน a เป็นจำนวนใดๆ ที่ $a \neq 0$ และ m, n เป็นจำนวนเต็ม จะได้ว่า

$$\boxed{a^m \times a^n = a^{m+n}}$$

พิจารณา

$$\begin{aligned} a^m \times a^n &= a^{m+n} \\ &= a^{n+m} \\ &= a^n \times a^m \end{aligned}$$

ตัวอย่าง 34. จงหาผลลัพธ์ของ $5^5 \times 3^0 \times 5^2$

<u>วิธีทำ</u> $$\begin{aligned} 5^5 \times 3^0 \times 5^2 &= 5^5 \times 1 \times 5^2 \\ &= 5^5 \times 5^2 \\ &= 5^{5+2} \\ &= 5^7 \end{aligned}$$

ตัวอย่าง 35. จงหาผลลัพธ์ของ $(-3)^4 \times (-3)^7 \times (-3)^2$

<u>วิธีทำ</u> $$\begin{aligned} (-3)^4 \times (-3)^7 \times (-3)^2 &= (-3)^{4+7+2} \\ &= (-3)^{13} \end{aligned}$$

ตัวอย่าง 36. จงหาผลลัพธ์ของ $(0.09)^{10} \times (0.3)^{-4} \times (0.3)^3$

<u>วิธีทำ</u> $$\begin{aligned} (0.09)^{10} \times (0.3)^{-4} \times (0.3)^3 &= \left((0.3)^2\right)^{10} \times (0.3)^{-4} \times (0.3)^3 \\ &= (0.3)^{2\times10} \times (0.3)^{-4} \times (0.3)^3 \\ &= (0.3)^{20} \times (0.3)^{-4} \times (0.3)^3 \\ &= (0.3)^{20+(-4)+3} \\ &= (0.3)^{20-4+3} \\ &= (0.3)^{19} \end{aligned}$$

ตัวอย่าง 37. จงหาผลลัพธ์ของ $2^4 \times 32$

<u>วิธีทำ</u> $$\begin{aligned} 2^4 \times 32 &= 2^4 \times 2^5 \\ &= 2^{4+5} \\ &= 2^9 \end{aligned}$$

ตัวอย่าง 38. จงหาผลลัพธ์ของ $2^5 \times (-2)^{-4}$

<u>วิธีทำ</u>
$$\begin{aligned}
2^5 \times (-2)^{-4} &= 2^5 \times \frac{1}{(-2)^4} \\
&= 2^5 \times \left(\frac{1}{(-2)\times(-2)\times(-2)\times(-2)}\right) \\
&= 2^5 \times \frac{1}{16} \\
&= 2^5 \times \left(\frac{1}{2\times 2\times 2\times 2}\right) \\
&= 2^5 \times \frac{1}{2^4} \\
&= 2^5 \times 2^{-4} \\
&= 2^{5+(-4)} \\
&= 2^1 \\
&= 2
\end{aligned}$$

ตัวอย่าง 39. จงหาผลลัพธ์ของ $x^{4n} \times x^{-12n} \times x^0$ เมื่อ $x \neq 0$

<u>วิธีทำ</u>
$$\begin{aligned}
x^{4n} \times x^{-12n} \times x^0 &= x^{4n+(-12n)+0} \\
&= x^{4n+(-12n)} \\
&= x^{4n-12n} \\
&= x^{-8n} \\
&= \frac{1}{x^{8n}}
\end{aligned}$$

ตัวอย่าง 40. จงหาผลลัพธ์ของ $(-2)^{-7} \times (-32) \times 2^3$

<u>วิธีทำ</u>
$$\begin{aligned}
(-2)^{-7} \times (-32) \times 2^3 &= (-2)^{-7} \times (-2)^5 \times 2^3 \\
&= (-2)^{-7} \times (-2) \times (-2)^4 \times 2^3 \\
&= (-2)^{-7} \times (-2)^1 \times (-2)^4 \times 2^3 \\
&= (-2)^{-7+1} \times (-2)^4 \times 2^3 \\
&= (-2)^{-6} \times (-2)^4 \times 2^3 \\
&= 2^{-6} \times 2^4 \times 2^3 \\
&= 2^{-6+4+3} = 2^1 = 2
\end{aligned}$$

จากข้อ 46 จะได้ว่า เมื่อแทน a เป็นจำนวนใดๆ ที่ $a \neq 0$ และ n เป็นจำนวนเต็มคู่ จะได้ว่า

$(-a)^n = a^n$ และ $(-a)^{-n} = a^{-n}$

2.2 การหารเลขยกกำลัง

นักเรียนเคยทราบมาแล้วว่า เมื่อแทน a เป็นจำนวนใดๆ ที่ $a \neq 0$ และ m, n เป็นจำนวนเต็ม จะได้ว่า

$$\boxed{a^m \div a^n = \frac{a^m}{a^n} = a^{m-n}}$$

พิจารณา

$$\begin{aligned} a^m \div a^n &= a^{m-n} \\ &\neq a^{n-m} \\ &\neq a^n \div a^m \quad \text{เมื่อ } m \neq n \end{aligned}$$

และ

$$\boxed{\text{นักเรียนควรสังเกต } \frac{a^m}{a^n} = \begin{cases} a^{m-n} & \text{เมื่อ } m > n \\ a^0 = 1 & \text{เมื่อ } m = n \text{ โดยที่ } a \neq 0 \text{ และ } m, n \text{ เป็นจำนวนเต็มบวก} \\ \dfrac{1}{a^{n-m}} & \text{เมื่อ } n > m \end{cases}}$$

และ

$$\boxed{a^{-n} = \frac{1}{a^n}}$$

ตัวอย่าง 41. จงหาผลลัพธ์ของ $2^4 \div 32$

<u>วิธีทำ</u>

$$\begin{aligned} 2^4 \div 32 &= 2^4 \div 2^5 \\ &= 2^{4-5} \\ &= 2^{-1} \\ &= \frac{1}{2^1} \\ &= \frac{1}{2} \end{aligned}$$

Note

....

....

....

....

....

ตัวอย่าง 42. จงหาผลลัพธ์ของ $(-3)^5 \div -3^5$

<u>วิธีทำ</u> $(-3)^5 \div (-3^5)$

$$
\begin{aligned}
(-3)^5 \div (-3^5) &= (-3)^5 \div (-(3^5)) \\
&= \left(\underbrace{(-3)\times(-3)}_{9}\times\underbrace{(-3)\times(-3)}_{9}\times(-3)\right) \div \left((-3)\times\underbrace{3\times 3}_{9}\times\underbrace{3\times 3}_{9}\right) \\
&= \left(\underbrace{(-3)\times(-3)}_{9}\times\underbrace{(-3)\times(-3)}_{9}\times(-3)\right) \div \left((-3)\times\underbrace{(-3)\times(-3)}_{9}\times\underbrace{(-3)\times(-3)}_{9}\right) \\
&= (-3)^5 \div (-3)^5 \\
&= (-3)^{5-5} \\
&= (-3)^0 \\
&= 1
\end{aligned}
$$

ตัวอย่าง 43. จงหาผลลัพธ์ของ $9m^{-4}n^{-6} \div (-3)m^5n^5$

<u>วิธีทำ</u>

$$
\begin{aligned}
9m^{-4}n^{-6} \div (-3)m^5n^5 &= \frac{9m^{-4}n^{-6}}{(-3)m^5n^5} \\
&= \frac{(-3)^2m^{-4}n^{-6}}{(-3)m^5n^5} \\
&= \frac{(-3)^2m^{-4}n^{-6}}{(-3)^1m^5n^5} \\
&= (-3)^{2-1}\cdot m^{-4-5}\cdot n^{-6-5} \\
&= (-3)^1\cdot m^{-9}\cdot n^{-11} \\
&= (-3)\cdot\left(\frac{1}{m^9}\right)\cdot\left(\frac{1}{n^{11}}\right) \\
&= \frac{-3}{m^9n^{11}}
\end{aligned}
$$

คำถาม 44. จงหาผลลัพธ์ของ $3^{2x} \div 3^{-2x}$

ตัวอย่าง 45. จงเขียน $4^8 \times a^5 \times 4^{-2}$ ให้อยู่ในรูปอย่างง่าย เมื่อ $a \neq 0$

<u>วิธีทำ</u>

$$
\begin{aligned}
4^8 \times a^5 \times 4^{-2} &= 4^8 \times 4^{-2} \times a^5 \\
&= 4^{8+(-2)} \times a^5 \\
&= 4^6 \times a^5 \\
&= 4^6a^5
\end{aligned}
$$

ตัวอย่าง 46. จงเขียน $2^{12} \times b^7 \times b^{-5} \times 4^{-4}$ ให้อยู่ในรูปอย่างง่าย เมื่อ $b \neq 0$

<u>วิธีทำ</u>
$$\begin{aligned} 2^{12} \times b^7 \times b^{-5} \times 4^{-4} &= 2^{12} \times 4^{-4} \times b^7 \times b^{-5} \\ &= 2^{12+(-4)} \times b^{7+(-5)} \\ &= 2^8 \times b^2 \\ &= 2^8 b^2 \end{aligned}$$

ตัวอย่าง 47. จงเขียน $3^8 \times a^{-2} \times 3^{-5}$ ให้อยู่ในรูปอย่างง่าย เมื่อ $a \neq 0$

<u>วิธีทำ</u>
$$\begin{aligned} 3^8 \times a^{-2} \times 3^{-5} &= 3^8 \times 3^{-3} \times a^{-2} \\ &= 3^{8+(-5)} \times a^{-2} \\ &= 3^3 \times a^{-2} \\ &= 3^3 \times \frac{1}{a^2} \\ &= \frac{3^3}{a^2} \end{aligned}$$

ตัวอย่าง 48. จงเขียน $5^{-5} \times b^4 \times b^{-3} \times 5^3$ ให้อยู่ในรูปอย่างง่าย เมื่อ $b \neq 0$

<u>วิธีทำ</u>
$$\begin{aligned} 5^{-5} \times b^4 \times b^{-3} \times 5^3 &= 5^{-5} \times 5^3 \times b^4 \times b^{-3} \\ &= 5^{-5+3} \times b^{4+(-3)} \\ &= 5^{-2} \times b^1 \\ &= \frac{1}{5^2} \times b \\ &= \frac{b}{5^2} \end{aligned}$$

ตัวอย่าง 49. ถ้า $a^x = 5$ แล้ว a^{5x} มีค่าเป็นเท่าใด

<u>วิธีทำ</u> จาก $a^x = 5$
$$\begin{aligned} a^{5x} &= (a^x)^5 \\ &= 5^5 \end{aligned}$$

ตัวอย่าง 50. ถ้า $a^{-x} = 7$ แล้ว a^{-4x} มีค่าเป็นเท่าใด

<u>วิธีทำ</u> จาก $a^{-x} = 7$
$$\begin{aligned} a^{-4x} &= \left(a^{-x}\right)^4 \\ &= 7^4 \end{aligned}$$

ตัวอย่าง 51. ถ้า $a^x = 3$ แล้ว a^{-3x} มีค่าเป็นเท่าใด

วิธีทำ จาก
$$\begin{aligned} a^x &= 3 \\ a^{3x} &= (a^x)^3 \\ &= 3^3 \\ &= 27 \\ a^{-3x} &= \frac{1}{a^{3x}} \\ &= \frac{1}{27} \end{aligned}$$

Note

....
....
....
....
....
....
....

ตัวอย่าง 52. ถ้า $a^{-x} = 2$ แล้ว a^{2x} มีค่าเป็นเท่าใด

วิธีทำ จาก
$$\begin{aligned} a^{-x} &= 2 \\ a^{-2x} &= \left(a^{-x}\right)^2 \\ &= 2^2 \\ &= 4 \\ a^{2x} &= a^{-(-2x)} \\ &= \frac{1}{a^{-2x}} \\ &= \frac{1}{4} \end{aligned}$$

Note

....
....
....
....
....
....
....

ตัวอย่าง 53. ถ้า $(27)^{-x} = 8$ แล้ว $(81)^x$ มีค่าเป็นเท่าใด

วิธีทำ จาก $(27)^{-x} = 8$

$$
\begin{aligned}
\text{จะได้ว่า}\quad (3^3)^{-x} &= \left(\frac{1}{2}\right)^{-3} \\
(3^x)^{-3} &= \left(\frac{1}{2}\right)^{-3} \\
\text{ดังนั้น}\quad 3^x &= \frac{1}{2} \\
\text{พิจารณา}\quad 81 &= 3^4 \\
\text{จะได้ว่า}\quad 81^x &= (3^4)^x \\
&= (3^x)^4 \\
&= \left(\frac{1}{2}\right)^4 \\
\text{ดังนั้น}\quad (81)^x &= \frac{1}{16}
\end{aligned}
$$

คำถาม 54. ถ้า $(125)^{-x} = 27$ แล้ว $(25)^x$ มีค่าเป็นเท่าใด

....

....

....

คำถาม 55. ถ้า $(16)^{-x} = 81$ แล้ว 8^{2x} มีค่าเป็นเท่าใด

....

....

....

คำถาม 56. ถ้า $(32)^{-x} = 243$ แล้ว $(16)^x$ มีค่าเป็นเท่าใด

....

....

....

คำถาม 57. ถ้า $(25)^2 = 5^x$ แล้ว $2x^2 - 1$ มีค่าเป็นเท่าใด

....

....

....

คำถาม 58. ถ้า $(27)^{-x} = \frac{1}{27}$ แล้ว $(4)^x$ มีค่าเป็นเท่าใด

....

....

....

ตัวอย่าง 59. จงเขียน $\dfrac{(2^4)^3 \times (2^2)^4 \times (0.02)^{-1}}{2^{15} \times 2^6 \times (-1)^5}$ ให้อยู่ในรูปอย่างง่าย

<u>วิธีทำ</u>

$$
\begin{aligned}
\frac{(2^4)^3 \times (2^2)^4 \times (0.02)^{-1}}{2^{15} \times 2^6 \times (-1)^5} &= \frac{2^{(4\times3)} \times 2^{(2\times4)} \times (2 \times 10^{-2})^{-1}}{2^{15} \times 2^6 \times (-1)^5} \\
&= \frac{2^{12} \times 2^8 \times (2 \times 10^{-2})^{-1}}{2^{15} \times 2^6 \times (-1)} \\
&= \frac{2^{12} \times 2^8}{2^{15} \times 2^6 \times (-1) \times (2 \times 10^{-2})^1} \\
&= \frac{2^{12} \times 2^8}{-(2^{15} \times 2^6 \times (2 \times 10^{-2})^1)} \\
&= -\left(\frac{2^{12} \times 2^8}{2^{15} \times 2^6 \times 2 \times 10^{-2}}\right) \\
&= -\left(\frac{2^{12} \times 2^8}{2^{15} \times 2^6 \times 2^1 \times \dfrac{1}{10^2}}\right) \\
&= -\left(\frac{2^{12} \times 2^8 \times 10^2}{2^{15} \times 2^6 \times 2^1}\right) \\
&= -\left(\frac{2^{(12+8)} \times 100}{2^{(15+6+1)}}\right) \\
&= -\left(\frac{2^{20} \times 100}{2^{22}}\right) \\
&= -(2^{(20-22)} \times 100) \\
&= -(2^{-2} \times 100) \\
&= -(\frac{1}{4} \times 100) \\
&= -25
\end{aligned}
$$

ตัวอย่าง 60. จงเขียน $\dfrac{a^{-1} + b^{-1}}{a^{-1} \times b^{-1}}$ ห้อยู่ในรูปอย่างง่าย

<u>วิธีทำ</u>

$$
\begin{aligned}
\frac{a^{-1} + b^{-1}}{a^{-1} \times b^{-1}} &= \frac{\left(\dfrac{1}{a^1} + \dfrac{1}{b^1}\right)}{(a \times b)^{-1}} \\
&= \frac{\left(\dfrac{b}{ab} + \dfrac{a}{ab}\right)}{\left(\dfrac{1}{ab}\right)} \\
&= \left(\frac{a+b}{\cancel{ab}}\right) \cdot \left(\frac{\cancel{ab}}{1}\right) \\
&= a + b
\end{aligned}
$$

2.3 ดอกเบี้ยทบต้น

ดอกเบี้ย คือ ผลตอบแทนที่ได้รับจากการนำเงินไปลงทุนหรือให้ผู้อื่นกู้ยืมไปใช้ประโยชน์ รวมไปถึงการนำเงินไปฝากธนาคาร ซึ่งผู้ลงทุนหรือผู้ให้กู้ย่อมหวังผลตอบแทนจากการลงทุนหรือการให้กู้ยืมเงินนั้น
ดอกเบี้ยสามารถแบ่งออกเป็น 2 ประเภท คือ

1. ดอกเบี้ยคงต้น (Simple Interest)
2. ดอกเบี้ยทบต้น (Compound Interest)

ดอกเบี้ยคงต้น หมายถึง ดอกเบี้ยที่คิดจากเงินต้นเริ่มแรก ซึ่งจะทำให้จำนวนดอกเบี้ยคงที่เท่ากันทุกปี[3]
ดอกเบี้ยทบต้น หมายถึง ดอกเบี้ยที่คิดจากเงินต้นเริ่มแรกบวกกับดอกเบี้ยที่ได้รับในแต่ละงวดที่ผ่านมา ซึ่งมีผลให้ดอกเบี้ยที่คำนวณได้เพิ่มขึ้นทุกปีตามเงินต้นที่เพิ่มขึ้น

การคำนวณดอกเบี้ยทบต้นจะยุ่งยากกว่าการคำนวณดอกเบี้ยคงต้น เพราะเงินต้นที่นำมาคิดดอกเบี้ยในแต่ละปีจะไม่เท่ากัน และการคิดดอกเบี้ยทบต้นยังนิยมคิดต่อช่วงเวลาที่แตกต่างกัน เช่น ดอกเบี้ยทบต้นต่อปี ต่อครึ่งปี ต่อเดือน หรือต่อวันก็ได้ขึ้นอยู่กับประเภทของธุรกิจ เงินที่ได้จากดอกเบี้ยรวมกับเงินต้น เรียกว่า **เงินรวม**

ดอกเบี้ยทบต้นมีความสัมพันธ์ดังนี้

$$A = P\left(1 + \frac{r}{100}\right)^t$$

โดยที่

- A แทน เงินรวมเมื่อสิ้นปี t (บาท)
- P แทน เงินต้น (บาท)
- r แทน อัตราดอกเบี้ย คิดเป็นร้อยละต่อปี
- t แทน เวลา (ปี หรือ ครั้ง)

หมายเหตุ

- เงินรวม (A) = เงินต้น + ดอกเบี้ย
- เงินต้น = เงินรวม - ดอกเบี้ย
- ดอกเบี้ย = เงินรวม - เงินต้น

[3] นักเรียนจะได้ศึกษารายละเอียดในเนื้อหา เรื่อง อัตราส่วนและร้อยละ วิชา คณิตศาสตร์พื้นฐาน ม.2 รหัส ค 22101

ตัวอย่าง 61. ฝากเงินไว้กับธนาคาร $20,000$ บาท อัตราดอกเบี้ยร้อยละ 2 ต่อปี โดยคิดดอกเบี้ยทบต้นปีละหนึ่งครั้ง อยากทราบว่าเมื่อฝากเงินครบเวลา 3 ปี จะได้ดอกเบี้ยเท่าใด

วิธีทำ จาก $A = P\left(1+\frac{r}{100}\right)^t$

และ $P = 20,000$

$r = 2$ % ต่อปี

$t = 3$ ปี

และ
$$\begin{aligned} A &= 20,000\left(1+\frac{2}{100}\right)^3 \\ &= 20,000(1+0.02)^3 \\ &= 20,000(1.02)^3 \\ &= 21,224.16 \end{aligned}$$

นั่นคือ เมื่อฝากเงินครบเวลา 3 ปี จะได้เงินรวม $= 21,224.16$ บาท

ดังนั้น เมื่อฝากเงินครบเวลา 3 ปี จะได้ดอกเบี้ย $= 21,224.16 - 20,000 = 1,224.16$ บาท

ตัวอย่าง 62. ฝากเงินไว้กับธนาคาร $40,000$ บาท อัตราดอกเบี้ยร้อยละ 3 ต่อปี โดยคิดดอกเบี้ยทบต้น 6 เดือนต่อครั้ง อยากทราบว่าเมื่อฝากเงินครบเวลา 5 ปี จะได้ดอกเบี้ยเท่าใด

วิธีทำ จาก $A = P\left(1+\frac{r}{100}\right)^t$

และ $P = 40,000$

$r = 1.5$ % ต่อปี ($\because$ คิดอัตราดอกเบี้ยปีละ 2 ครั้ง $r = \frac{3}{2} = 1.5\%$ ต่อปี)

$t = 10$ ครั้ง ($\because$ คิดอัตราดอกเบี้ยปีละ 2 ครั้ง 5 ปี = $5 \times 2 = 10$ ครั้ง)

และ
$$\begin{aligned} A &= 40,000\left(1+\frac{1.5}{100}\right)^{10} \\ &= 40,000(1+0.015)^{10} \\ &= 40,000(1.015)^{10} \\ &= 46,421.633 \end{aligned}$$

นั่นคือ เมื่อฝากเงินครบเวลา 5 ปี จะได้เงินรวม $= 46,421.633$ บาท

ดังนั้น เมื่อฝากเงินครบเวลา 5 ปี จะได้ดอกเบี้ย $= 46,421.633 - 40,000 = 6,421.633$ บาท

2.4 การใช้จำนวนที่มีหน่วยเป็นล้าน

จากเนื้อหา เรื่อง สัญกรณ์ทางวิทยาศาสตร์ที่นักเรียนได้เรียนมาแล้ว จะพบว่า

1 ล้าน	=	1,000,000	เขียนแทนด้วย	1×10^6
10 ล้าน	=	10,000,000	เขียนแทนด้วย	$1 \times 10^1 \times 10^6$
100 ล้าน	=	100,000,000	เขียนแทนด้วย	$1 \times 10^2 \times 10^6$
1,000 ล้าน	=	1,000,000,000	เขียนแทนด้วย	$1 \times 10^3 \times 10^6$
10,000 ล้าน	=	10,000,000,000	เขียนแทนด้วย	$1 \times 10^4 \times 10^6$
100,000 ล้าน	=	100,000,000,000	เขียนแทนด้วย	$1 \times 10^5 \times 10^6$
1,000,000 ล้าน	=	1,000,000,000,000	เขียนแทนด้วย	$1 \times 10^6 \times 10^6$
$\vdots$		$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$
$\underbrace{1,000,000\ldots,000}_{n \text{ ตัว}}$ ล้าน	=	$\underbrace{1,000,000\ldots,000,000,000}_{n+6 \text{ ตัว}}$	เขียนแทนด้วย	$1 \times 10^n \times 10^6$

3 รากที่ n ของจำนวนจริง

3.1 นิยามและตัวอย่าง

นิยาม 63. ให้ n เป็นจำนวนเต็มบวกที่มากกว่า 1 และ a, b เป็นจำนวนจริง b เป็นรากที่ n ของ a ก็ต่อเมื่อ $b^n = a$

$$\forall n \in \mathbb{Z}^+ \text{ ที่ } n > 1 \text{ และ } a, b \in \mathbb{R},\ b \text{ เป็นรากที่ } n \text{ ของ } a \Leftrightarrow b^n = a$$

นิยาม 64. สัญลักษณ์ $\sqrt{}$ อ่านว่า กรณฑ์ (root or radical sign) นั่นคือ

$$\forall n \in \mathbb{Z}^+ \text{ ที่ } n > 1 \text{ และ } a, b \in \mathbb{R},\ b \text{ เป็น } \sqrt[n]{a} \Leftrightarrow b^n = a$$

โดยปกติแล้ว $\sqrt[n]{a}$ นิยมอ่านว่า “รากที่ n ของ a” หรือ “กรณฑ์ที่ n ของ a”

☞ เรียก n ว่า “ดัชนีของกรณฑ์ (index of root)” และ

☞ เรียก a ว่า “ตัวถูกถอดกรณฑ์ (radicand)”

☞ สำหรับรากที่สองของ a ไม่นิยมเขียน $\sqrt[2]{a}$ แต่นิยมเขียนเพียง $\sqrt{a}$

พิจารณาต่อไปนี้

กำหนดค่า	$n = 2$	จะได้ว่า	$b = \sqrt{a}$	$\Leftrightarrow b^2 = a$	อ่านว่า	b เป็นรากที่ 2 ของ a
	$n = 3$		$b = \sqrt[3]{a}$	$\Leftrightarrow b^3 = a$		b เป็นรากที่ 3 ของ a
	$n = 4$		$b = \sqrt[4]{a}$	$\Leftrightarrow b^4 = a$		b เป็นรากที่ 4 ของ a
	$n = 5$		$b = \sqrt[5]{a}$	$\Leftrightarrow b^5 = a$		b เป็นรากที่ 5 ของ a
	$n = 6$		$b = \sqrt[6]{a}$	$\Leftrightarrow b^6 = a$		b เป็นรากที่ 6 ของ a
	$n = 7$		$b = \sqrt[7]{a}$	$\Leftrightarrow b^7 = a$		b เป็นรากที่ 7 ของ a
	$n = 8$		$b = \sqrt[8]{a}$	$\Leftrightarrow b^8 = a$		b เป็นรากที่ 8 ของ a
	$n = 9$		$b = \sqrt[9]{a}$	$\Leftrightarrow b^9 = a$		b เป็นรากที่ 9 ของ a
	$n = 10$		$b = \sqrt[10]{a}$	$\Leftrightarrow b^{10} = a$		b เป็นรากที่ 10 ของ a
	$n = 11$		$b = \sqrt[11]{a}$	$\Leftrightarrow b^{11} = a$		b เป็นรากที่ 11 ของ a
	$n = 12$		$b = \sqrt[12]{a}$	$\Leftrightarrow b^{12} = a$		b เป็นรากที่ 12 ของ a
	$n = 13$		$b = \sqrt[13]{a}$	$\Leftrightarrow b^{13} = a$		b เป็นรากที่ 13 ของ a
	$\vdots$		$\vdots$	$\vdots$		$\vdots$
	$n = m$		$b = \sqrt[m]{a}$	$\Leftrightarrow b^m = a$		b เป็นรากที่ m ของ a

ซึ่ง $m \in \mathbb{Z}^+$ และ $m \neq 1$

หมายเหตุ

- ถ้า $a = 0$ จะได้ว่า $\sqrt[n]{a} = 0$
- ถ้า $a > 0$ จะได้ว่า $\sqrt[n]{a} > 0$ ($\sqrt[n]{a}$ เป็นจำนวนเต็มบวก)
- ถ้า $a < 0$ จะได้ว่า $\begin{cases} \sqrt[n]{a} \text{ เป็นจำนวนจริงลบ} & \text{เมื่อ } n \text{ เป็นจำนวนเต็มคี่} \\ \sqrt[n]{a} \text{ ไม่มีคำตอบเป็นจำนวนจริง} & \text{เมื่อ } n \text{ เป็นจำนวนเต็มคู่} \end{cases}$

ตัวอย่าง 65. $2 = \sqrt[4]{16}$ หมายถึง $2^4 = 16$

ตัวอย่าง 66. $-2 = \sqrt[5]{-32}$ หมายถึง $(-2)^5 = -32$

ตัวอย่าง 67. $\frac{3}{4} = \sqrt[3]{\frac{27}{64}}$ หมายถึง $\left(\frac{3}{4}\right)^3 = \frac{27}{64}$

ทฤษฎีบท 68. $\forall n \in \mathbb{Z}^+$ ที่ $n > 1$ และ $a, b \in \mathbb{R}$ จะได้ว่า

1. ถ้า a เป็นจำนวนจริงบวก และ n เป็นจำนวนคู่ จะมีรากที่ n ของ a เป็นจำนวนจริง 2 ค่า
2. ถ้า a เป็นจำนวนจริงบวก และ n เป็นจำนวนคี่ จะมีค่ารากที่ n ของ a เป็นจำนวนจริง 1 ค่า
3. ถ้า a เป็นจำนวนจริงลบและ n เป็นจำนวนคู่ จะไม่มีรากที่ n ที่เป็นจำนวนจริง
4. ถ้า a เป็นจำนวนจริงลบ และ n เป็นจำนวนคี่ จะมีรากที่ n ของ a เป็นจำนวนจริง 1 ค่า

นิยาม 69. สำหรับจำนวนเต็มบวก n ถ้า n เป็นจำนวนเต็มคู่และ a เป็นจำนวนจริงบวกแล้ว

1. $\sqrt[n]{a}$ แทนรากที่ n ของ a ที่เป็นบวก เรียก a ว่า ค่าหลักของรากที่ n ของ a (principle nth root of a)
2. $-\sqrt[n]{a}$ แทนรากที่ n ของ a ที่เป็นลบ

ตัวอย่าง 70. พิจารณา 4 เป็นจำนวนเต็มคู่จะได้ว่า

- จาก $2^4 = 16$ ดังนั้น รากที่ 4 ของ 16 ที่เป็นบวกของ 16 คือ 2 (นั่นคือ $\sqrt[4]{16} = 2$) และ
- จาก $(-2)^4 = 16$ ดังนั้น รากที่ 4 ของ 16 ที่เป็นลบของ 16 คือ -2 (นั่นคือ $-\sqrt[4]{16} = -2$)
- ไม่มี $\sqrt[4]{-16}$ และ $-\sqrt[4]{-16}$ ที่เป็นจำนวนจริง เพราะไม่มีจำนวนจริงใดเลยที่ยกกำลัง 4 แล้วเท่ากับ -16

นิยาม 71. สำหรับ $n \in \mathbb{Z}^+$ ถ้า n เป็นจำนวนเต็มคี่ และ $a \in \mathbb{R}$ แล้ว $\sqrt[n]{a}$ แทน รากที่ n ของ a

ตัวอย่าง 72. พิจารณา 5 เป็นจำนวนเต็มคี่จะได้ว่า

- จาก $2^5 = 32$ ดังนั้น รากที่ 5 ของ 32 คือ 2 (นั่นคือ $\sqrt[5]{32} = 2$) และ
- จาก $(-2)^5 = -32$ ดังนั้น รากที่ 5 ของ -32 คือ -2 (นั่นคือ $\sqrt[5]{-32} = -2$)

ข้อสังเกต 73. $\forall a \in \mathbb{R} - \{0\}, n \in \mathbb{Z}^+$ จะได้ว่า
$$\begin{cases} \sqrt[n]{a} & \in \mathbb{R} \quad \text{เมื่อ } n \text{ เป็นจำนวนเต็มคี่} \\ \sqrt[n]{-a} & \in \mathbb{R} \quad \text{เมื่อ } n \text{ เป็นจำนวนเต็มคี่} \\ \sqrt[n]{a} & \in \mathbb{R} \quad \text{เมื่อ } n \text{ เป็นจำนวนเต็มคู่} \\ \sqrt[n]{-a} & \notin \mathbb{R} \quad \text{เมื่อ } n \text{ เป็นจำนวนเต็มคู่}^* \\ \sqrt[n]{0} = 0 & \in \mathbb{R} \end{cases}$$

<u>**หมายเหตุ**</u> * ไม่มีคำตอบเป็นจำนวนจริง

3.2 ค่าของ a^n ที่ควรทราบ

2^0	$= 1$	3^0	$= 1$	4^0	$= 1$
2^1	$= 2$	3^1	$= 3$	4^1	$= 4$
2^2	$= 4$	3^2	$= 6$	4^2	$= 16$
2^3	$= 8$	3^3	$= 27$	4^3	$= 64$
2^4	$= 16$	3^4	$= 81$	4^4	$= 256$
2^5	$= 32$	3^5	$= 243$	4^5	$= 1,024$
2^6	$= 64$	3^6	$= 729$	4^6	$= 4,096$
2^7	$= 128$	3^7	$= 2,187$	4^7	$= 16,384$
2^8	$= 256$	3^8	$= 6,561$	4^8	$= 65,536$
2^9	$= 512$	3^9	$= 19,638$	4^9	$= 262,144$
2^{10}	$= 1,024$	3^{10}	$= 59,049$	4^{10}	$= 1,048,576$

5^0	$= 1$	6^0	$= 1$	7^0	$= 1$
5^1	$= 5$	6^1	$= 6$	7^1	$= 7$
5^2	$= 25$	6^2	$= 36$	7^2	$= 47$
5^3	$= 125$	6^3	$= 216$	7^3	$= 343$
5^4	$= 625$	6^4	$= 1,296$	7^4	$= 2,401$
5^5	$= 3,125$	6^5	$= 7,776$	7^5	$= 16,807$
5^6	$= 15,625$	6^6	$= 46,656$	7^6	$= 117,649$
5^7	$= 78,125$	6^7	$= 279,936$	7^7	$= 823,543$
5^8	$= 390,625$	6^8	$= 1,679,616$	7^8	$= 5,764,801$
5^9	$= 1,953,125$	6^9	$= 10,077,696$	7^9	$= 40,535,607$
5^{10}	$= 9,765,625$	6^{10}	$= 60,466,176$	7^{10}	$= 282,475,249$

8^0	$= 1$	9^0	$= 1$	10^0	$= 1$
8^1	$= 8$	9^1	$= 9$	10^1	$= 10$
8^2	$= 64$	9^2	$= 81$	10^2	$= 100$
8^3	$= 512$	9^3	$= 729$	10^3	$= 1,000$
8^4	$= 4,096$	9^4	$= 6,516$	10^4	$= 10,000$
8^5	$= 32,768$	9^5	$= 59,049$	10^5	$= 100,000$
8^6	$= 262,144$	9^6	$= 531,441$	10^6	$= 1,000,000$
8^7	$= 2,097,152$	9^7	$= 4,782,969$	10^7	$= 10,000,000$
8^8	$= 16,777,216$	9^8	$= 43,046,721$	10^8	$= 100.000,000$
8^9	$= 134,217,738$	9^9	$= 387,420,489$	10^9	$= 1,000,000,000$
8^{10}	$= 1,073,741,824$	9^{10}	$= 3,486,784,401$	10^{10}	$= 10,000,000,000$

นักเรียนควรทราบ 8 สำหรับ a^n
$$\begin{cases} (-a)^n & = -a \cdot (-a)^{n-1} \\ & = -a \cdot a^{n-1} \\ & = -a^n \quad \text{เมื่อ } n \text{ เป็นจำนวนเต็มคี่} \\ a^n & = (-a)^n \quad \text{เมื่อ } n \text{ เป็นจำนวนเต็มคู่} \end{cases}$$

ตัวอย่าง 74. พิจารณา $(-4)^2 = (-4) \times (-4) = 4 \times 4 = 16 = 4^2$

ตัวอย่าง 75. พิจารณา $(-2)^3 = (-2) \times (-2)^{3-1} = (-2) \times 2^2 = (-2) \times 4 = -2^3 = -8 = -2^3$

นักเรียนควรทราบ 9 สำหรับ $a \neq 0$ จะได้ว่า $\left(\frac{1}{a}\right)^{-n} = a^n$

ตัวอย่าง 76. $\left(\frac{1}{3}\right)^{-4} = \left(-\frac{1}{3}\right)^{-4} = \left(\frac{-1}{3}\right)^{-4} = \left(\frac{1}{-3}\right)^{-4} = (-3)^4 = 3^4$

ตัวอย่าง 77. $\left(-\frac{1}{2}\right)^{-3} = \left(\frac{-1}{2}\right)^{-3} = \left(\frac{1}{-2}\right)^{-3} = (-2)^3$

ตัวอย่าง 78. $\left(\frac{1}{2x^2}\right)^{-5} = (2x^2)^5$ เมื่อ $x \neq 0$

นักเรียนควรทราบ 10 สำหรับ $a, b \neq 0$ จะได้ว่า $\left(\frac{a}{b}\right)^{-n} = \left(\frac{b}{a}\right)^n$

ตัวอย่าง 79. $\left(\frac{2}{3}\right)^{-4} = \left(\frac{3}{2}\right)^4 = \left(-\frac{3}{2}\right)^4$

ตัวอย่าง 80. $\left(-\frac{5}{7}\right)^{-5} = \left(-\frac{7}{5}\right)^5$

ตัวอย่าง 81. $\left(-\frac{2x}{5}\right)^{-2} = \left(-\frac{5}{2x}\right)^2 = \left(\frac{5}{2x}\right)^2$ เมื่อ $x \neq 0$

ตัวอย่าง 82. $\left(\frac{4}{9y}\right)^{-3} = \left(\frac{9y}{4}\right)^3$ เมื่อ $y \neq 0$

ตัวอย่าง 83. $\left(\frac{2x}{5y}\right)^{-7} = \left(\frac{5y}{2x}\right)^7$ เมื่อ $x, y \neq 0$

ตัวอย่าง 84. $\left(\frac{3x}{4y}\right)^{-6} = \left(-\frac{4y}{3x}\right)^6 = \left(\frac{4y}{3x}\right)^6$ เมื่อ $x, y \neq 0$

ตัวอย่าง 85. $\left(\frac{x+y}{x-y}\right)^{-3} = \left(\frac{x-y}{x+y}\right)^3$ เมื่อ $x \neq y$

ตัวอย่าง 86. $\left(\frac{x+y}{x-y}\right)^{-2} = \left(-\frac{x-y}{x+y}\right)^2 = \left(\frac{x-y}{x+y}\right)^2$ เมื่อ $x \neq y$

3.3 แบบฝึกหัดที่ 1.5

คำสั่ง จงเติมข้อความลงในช่องว่างให้สมบูรณ์

ข้อ	**รากที่ n ของ a ในรูป $\sqrt[n]{a}$**	**คำอ่าน**	**เลขดัชนี (n)**	**ตัวถูกถอดกรณ์ (a)**
ตัวอย่าง	$\sqrt[4]{34}$	รากที่ 4 ของ 34	4	34
1	$\sqrt[5]{-32}$			
2	$\sqrt[3]{18}$			
3	$\sqrt{23}$			
4	$\sqrt[7]{-123}$			
5	$\sqrt[8]{256}$			
6	$\sqrt[11]{-1}$			
7	$\sqrt[6]{55}$			
8	$\sqrt[3]{3x^3y}$			
9	$\sqrt{4xy^2z^4}$			
10	$\sqrt[5]{-123,454,321}$			
11	$\sqrt[5]{-0.00001}$			
12	$\sqrt{4x^2}$			
13	$\sqrt[3]{-\frac{8}{125}}$			
14	$\sqrt[4]{\frac{1}{16}}$			
15	$\sqrt[5]{-\frac{32x^{10}}{125y^5}}$			

3.4 การเปรียบเทียบค่ายกกำลังของจำนวนจริง

ตัวอย่าง 87. จงเรียงลำดับจำนวนต่อไปนี้ จากค่ามากไปหาค่าน้อย $1,000^{1,000}$, $100^{10,000}$, $10^{100,000}$

วิธีทำ

พิจารณา $1,000^{1,000} = (10^3)^{1,000} = 10^{3,000}$

$100^{10,000} = (10^2)^{10,000} = 10^{20,000}$

$10^{100,000} = 10^{100,000}$

นั่นคือ $10^{100,000} > 10^{20,000} > 10^{3,000}$

ดังนั้น เมื่อเรียงจากค่ามากไปหาค่าน้อย จะได้ $10^{100,000}$, $100^{10,000}$, $1,000^{1,000}$ ตามลำดับ

ตัวอย่าง 88. จงเรียงลำดับจำนวนต่อไปนี้ จากค่ามากไปหาค่าน้อย 2^{3^4}, 2^{4^3}, 4^{2^3} และ 4^{3^2}

วิธีทำ

พิจารณา $2^{3^4} = 2^{(3^4)} = 2^{(3\times3\times3\times3)} = 2^{81}$

$2^{4^3} = 2^{(4^3)} = 2^{(4\times4\times4)} = 2^{64}$

$4^{2^3} = 4^{(2^3)} = 4^{(2\times2\times2)} = 4^8 = (2^2)^8 = 2^{16}$

$4^{3^2} = 4^{(3\times3)} = 4^9 = (2^2)^9 = 2^{18}$

นั่นคือ $2^{81} > 2^{64} > 2^{18} > 2^{16}$

ดังนั้น เมื่อเรียงจากค่ามากไปหาค่าน้อย จะได้ 2^{3^4}, 2^{4^3}, 4^{3^2} และ 4^{2^3} ตามลำดับ

ตัวอย่าง 89. กำหนด $x = 512$ จงหาค่าของ $x^{\frac{26}{81}}\left[x\left(x(x^{\frac{1}{3}})^{\frac{1}{3}}\right)^{\frac{1}{3}}\right]^{\frac{1}{3}}$

<u>วิธีทำ</u>

$$
\begin{aligned}
x^{\frac{26}{81}}\left[x\left(x(x^{\frac{1}{3}})^{\frac{1}{3}}\right)^{\frac{1}{3}}\right]^{\frac{1}{3}} &= x^{\frac{26}{81}}\left[x\left(x(x^{\frac{1}{9}})\right)^{\frac{1}{3}}\right]^{\frac{1}{3}} \\
&= x^{\frac{26}{81}}\left[x\left(x\cdot x^{\frac{1}{9}}\right)^{\frac{1}{3}}\right]^{\frac{1}{3}} \\
&= x^{\frac{26}{81}}\left[x\left(x^{\frac{10}{9}}\right)^{\frac{1}{3}}\right]^{\frac{1}{3}} \\
&= x^{\frac{26}{81}}\left[x\left(x^{\frac{10}{27}}\right)\right]^{\frac{1}{3}} \\
&= x^{\frac{26}{81}}\left[x\cdot x^{\frac{10}{27}}\right]^{\frac{1}{3}} \\
&= x^{\frac{26}{81}}\left(x^{\frac{37}{27}}\right)^{\frac{1}{3}} \\
&= x^{\frac{26}{81}}\cdot x^{\frac{37}{81}} \\
&= x^{\frac{63}{81}} \\
&= x^{\frac{7}{9}} \\
\text{แทนค่า } x = 512 \text{ จะได้} &= (512)^{\frac{7}{9}} \\
&= (2^9)^{\frac{7}{9}} \\
&= 2^7 \\
&= 128
\end{aligned}
$$

ทฤษฎีบท 90. ให้ $a \in \mathbb{Z}^+$ และ $x, y \in \mathbb{Q}$ ถ้า $a^x = a^y$ แล้ว $x = y$

ตัวอย่าง 91. กำหนด $64^{-x} = 8$ จงหาค่าของ 2^{4x}

<u>วิธีทำ</u>

$$
\begin{aligned}
\text{จาก } 64^{-x} = 8 \text{ จะได้} \quad 2^{-6x} &= 2^3 \\
\text{ดังนั้น} \quad -6x &= 3 \\
x &= -\frac{1}{2} \\
\text{แทนค่า } x = -\frac{1}{2} \text{ ใน } 2^{4x} &= 2^{4(-\frac{1}{2})} \\
&= 2^{-2} \\
&= \frac{1}{2^2} \\
&= \frac{1}{4}
\end{aligned}
$$

ตัวอย่าง 92. กำหนด $8^{\frac{x}{2}} = 5$ จงหาค่าของ 2^{3x}

<u>วิธีทำ</u> จาก $8^{\frac{x}{2}} = 5$ จะได้ $2^{\frac{3x}{2}} = 5$

และจาก
$$\begin{aligned} 2^{3x} &= \left(2^{\frac{3x}{2}}\right)^2 \\ &= 5^2 \\ &= 25 \end{aligned}$$

ดังนั้น $2^{3x} = 25$

ตัวอย่าง 93. กำหนด $64^{\frac{x}{4}} = 3$ จงหาค่าของ 4^{-3x}

<u>วิธีทำ</u> จาก $64^{\frac{x}{4}} = 3$ จะได้ $4^{\frac{3x}{4}} = 3$

และจาก
$$\begin{aligned} 4^{3x} &= \left(4^{\frac{3x}{4}}\right)^4 \\ &= 3^4 \end{aligned}$$

จาก
$$\begin{aligned} 4^{-3x} &= \frac{1}{4^{3x}} \\ &= \frac{1}{\left(4^{\frac{3x}{4}}\right)^4} \\ &= \frac{1}{3^4} \\ &= \frac{1}{81} \end{aligned}$$

ดังนั้น $4^{-3x} = \dfrac{1}{81}$

ตัวอย่าง 94. กำหนด $(16)^{-x} = 128$ จงหาค่าของ $2^{\frac{4x}{7}}$

<u>วิธีทำ</u> จาก $(16)^{-x} = 128$ จะได้ $2^{-4x} = 2^7$

ดังนั้น
$$\begin{aligned} -4x &= 7 \\ x &= \frac{-7}{4} \end{aligned}$$

จะได้ว่า
$$\begin{aligned} 2^{\frac{4x}{7}} &= 2^{\left(\frac{4}{7}\right)\cdot\left(\frac{-7}{4}\right)} \\ &= 2^{-1} \\ &= \frac{1}{2} \end{aligned}$$

ดังนั้น $2^{\frac{4x}{7}} = \dfrac{1}{2}$

ตัวอย่าง 95. กำหนด $(32)^x = 243$ จงหาค่าของ 2^{4x}

<u>วิธีทำ</u> จาก $(32)^x = 243$ จะได้ $2^{5x} = 3^5$

นำ $\dfrac{4}{5}$ คูณเลขยกกำลังทั้งสองข้าง จะได้
$$\begin{aligned} \left(2^{5x}\right)^{\frac{4}{5}} &= \left(3^5\right)^{\frac{4}{5}} \\ 2^{4x} &= 3^4 \\ &= 81 \end{aligned}$$

ดังนั้น $2^{4x} = 81$

3.5 แบบฝึกหัดที่ 1.6

คำสั่ง จงตอบคำถามตามเงื่อนไขที่กำหนดให้ต่อไปนี้

1. กำหนดให้ $(64)^{-x} = 32$ จงหาค่าของ $2^{(\frac{5x}{6})}$

2. กำหนดให้ $(27)^{-x} = 81$ จงหาค่าของ $9^{(\frac{-3x}{8})}$

3. กำหนดให้ $(32)^{\frac{x}{2}} = 5$ จงหาค่าของ 2^{5x}

4. กำหนดให้ $(16)^{\frac{x}{3}} = 5$ จงหาค่าของ 2^{-4x}

5. กำหนดให้ $(81)^{\frac{x}{3}} = 2$ จงหาค่าของ $5 \cdot 3^{4x}$

6. กำหนดให้ $(125)^{\frac{x}{2}} = 4$ จงหาค่าของ $2 \cdot 25^{\frac{3x}{2}}$

7. กำหนดให้ $(16)^{x} = 81$ จงหาค่าของ 2^{3x}

8. กำหนดให้ $(125)^{x} = 64$ จงหาค่าของ 5^{2x}

9. กำหนดให้ $(36)^{2x} = 81$ จงหาค่าของ $2 \cdot 6^{3x}$

10. กำหนดให้ $(49)^{3x} = 8^{2}$ จงหาค่าของ $3 \cdot 7^{5x} + 1$

ตัวอย่าง 96. กำหนด $(-2)^{2x} = \frac{1}{9}$ จงหาค่าของ 4^{-2x}

<u>วิธีทำ</u> จาก $(-2)^{2x} = \frac{1}{9}$ จะได้ $\left(-2^2\right)^x = 9^{-1}$

ดังนั้น
$$\begin{aligned} 4^x &= 9^{-1} \\ 4^{-2x} &= (4^x)^{-2} \\ &= \left(9^{-1}\right)^{-2} \\ &= 9^2 \\ &= 81 \end{aligned}$$

ดังนั้น $4^{-2x} = 81$

พิจารณาสูตรผลต่างกำลังสอง(different square); $\forall x, y \in \mathbb{R},\ x^2 - y^2 = (x-y)(x+y)$
และ $\forall a \in \mathbb{R} - \{0\}, m, n \in \mathbb{Z},\quad (a^m)^n = a^{mn}$

จะได้ว่า
$$\begin{aligned} \left(1 - x^{\frac{1}{n}}\right)\left(1 + x^{\frac{1}{n}}\right) &= \left(1^2 - x^{(\frac{1}{n})2}\right) \\ &= \left(1 - x^{\frac{2}{n}}\right) \end{aligned}$$

นั่นคือ $\left(1 - x^{\frac{1}{n}}\right)\left(1 + x^{\frac{1}{n}}\right) = \left(1 - x^{\frac{2}{n}}\right), x > 0, n \in \mathbb{N}$

ตัวอย่าง 97. กำหนด $x = 2$ จงหาค่าของ $(1 - x^{\frac{1}{8}})(1 + x^{\frac{1}{8}})(1 + x^{\frac{1}{4}})(1 + x^{\frac{1}{2}})(1 + x)$

<u>วิธีทำ</u> จากโจทย์จะได้
$$\begin{aligned} &= \left[(1 - x^{\frac{1}{8}})(1 + x^{\frac{1}{8}})\right](1 + x^{\frac{1}{4}})(1 + x^{\frac{1}{2}})(1 + x) \\ &= (1 - x^{\frac{2}{8}})(1 + x^{\frac{1}{4}})(1 + x^{\frac{1}{2}})(1 + x) \\ &= \left[(1 - x^{\frac{1}{4}})(1 + x^{\frac{1}{4}})\right](1 + x^{\frac{1}{2}})(1 + x) \\ &= (1 - x^{\frac{2}{4}})(1 + x^{\frac{1}{2}})(1 + x) \\ &= \left[(1 - x^{\frac{1}{2}})(1 + x^{\frac{1}{2}})\right](1 + x) \\ &= (1 - x^{\frac{2}{2}})(1 + x) \\ &= (1 - x)(1 + x) \\ &= (1 - x^2) \\ &= (1 - 2^2) \\ &= (1 - 4) \\ &= -3 \end{aligned}$$

ดังนั้น เมื่อ $x = 2$ จะได้ว่า $(1 - x^{\frac{1}{8}})(1 + x^{\frac{1}{8}})(1 + x^{\frac{1}{4}})(1 + x^{\frac{1}{2}})(1 + x) = -3$

3.6 แบบฝึกหัดที่ 1.7

1.7-1 คำสั่ง จงตอบคำถามตามเงื่อนไขที่กำหนดให้ต่อไปนี้

1. กำหนดให้ $(-3)^{2x} = \frac{1}{5}$ จงหาค่าของ 9^{-3x}

....
....
....
....
....
....

2. กำหนดให้ $(-4)^{6x} = \frac{1}{2}$ จงหาค่าของ 16^{-9x}

....
....
....
....
....
....

3. กำหนดให้ $(-5)^{2x} = \frac{1}{3}$ จงหาค่าของ 25^{-4x}

....
....
....
....
....
....

4. กำหนดให้ $(-9)^{4x} = \frac{1}{5}$ จงหาค่าของ 81^{-4x}

....
....
....
....
....
....

1.7-2 คำสั่ง จงตอบคำถามตามเงื่อนไขที่กำหนดให้ต่อไปนี้

1. กำหนด $x = 3$ จงหาค่าของ $(1 - x^{\frac{1}{8}})(1 + x^{\frac{1}{8}})(1 + x^{\frac{1}{4}})(1 + x^{\frac{1}{2}})(1 + x)$

....
....
....
....
....

2. กำหนด $x = 4$ จงหาค่าของ $(1 - x^{\frac{1}{8}})(1 + x^{\frac{1}{8}})(1 + x^{\frac{1}{4}})(1 + x^{\frac{1}{2}})(1 + x)$

....
....
....
....
....

3. กำหนด $x = 5$ จงหาค่าของ $(1 - x^{\frac{1}{32}})(1 + x^{\frac{1}{32}})(1 + x^{\frac{1}{16}})(1 + x^{\frac{1}{8}})(1 + x^{\frac{1}{4}})(1 + x^{\frac{1}{2}})(1 + x)$

....
....
....
....
....
....

พิจารณาต่อไปนี้ ถ้า $a \in \mathbb{R}^+, n \in \mathbb{N}$

จาก $\left(1 - a^{\frac{1}{n}}\right)\left(1 + a^{\frac{1}{n}}\right) = \left(1 - a^{\frac{2}{n}}\right)$

พิจารณา

$$
\begin{aligned}
& \left(1+a^{\left(\frac{1}{2^0}\right)}\right)\left(1+a^{\left(\frac{1}{2^1}\right)}\right)\left(1+a^{\left(\frac{1}{2^2}\right)}\right)\ldots\left(1+a^{\left(\frac{1}{2^{(n-2)}}\right)}\right)\left(1+a^{\left(\frac{1}{2^{(n-1)}}\right)}\right)\left(1-a^{\left(\frac{1}{2^{(n-1)}}\right)}\right) \\
= & \left(1+a^{\left(\frac{1}{2^0}\right)}\right)\left(1+a^{\left(\frac{1}{2^1}\right)}\right)\left(1+a^{\left(\frac{1}{2^2}\right)}\right)\ldots\left(1+a^{\left(\frac{1}{2^{(n-2)}}\right)}\right)\left(1-a^{\left(\frac{2}{2^{(n-1)}}\right)}\right) \\
= & \left(1+a^{\left(\frac{1}{2^0}\right)}\right)\left(1+a^{\left(\frac{1}{2^1}\right)}\right)\left(1+a^{\left(\frac{1}{2^2}\right)}\right)\ldots\left(1+a^{\left(\frac{1}{2^{(n-2)}}\right)}\right)\left(1-a^{\left(\frac{1}{2^{(n-2)}}\right)}\right) \\
= & \left(1+a^{\left(\frac{1}{2^0}\right)}\right)\left(1+a^{\left(\frac{1}{2^1}\right)}\right)\left(1+a^{\left(\frac{1}{2^2}\right)}\right)\ldots\left(1-a^{\left(\frac{2}{2^{(n-2)}}\right)}\right) \\
= & \left(1+a^{\left(\frac{1}{2^0}\right)}\right)\left(1+a^{\left(\frac{1}{2^1}\right)}\right)\left(1+a^{\left(\frac{1}{2^2}\right)}\right)\ldots\left(1-a^{\left(\frac{1}{2^{(n-3)}}\right)}\right) \\
= & \left(1+a^{\left(\frac{1}{2^0}\right)}\right)\left(1+a^{\left(\frac{1}{2^1}\right)}\right)\left(1+a^{\left(\frac{1}{2^2}\right)}\right)\left(1-a^{\left(\frac{1}{2^2}\right)}\right) \\
= & \left(1+a^{\left(\frac{1}{2^0}\right)}\right)\left(1+a^{\left(\frac{1}{2^1}\right)}\right)\left(1-a^{\left(\frac{2}{2^2}\right)}\right) \\
= & \left(1+a^{\left(\frac{1}{2^0}\right)}\right)\left(1+a^{\left(\frac{1}{2^1}\right)}\right)\left(1-a^{\left(\frac{1}{2^1}\right)}\right) \\
= & \left(1+a^{\left(\frac{1}{2^0}\right)}\right)\left(1-a^{\left(\frac{2}{2^1}\right)}\right) \\
= & \left(1+a^{\left(\frac{1}{2^0}\right)}\right)\left(1-a^{\left(\frac{1}{2^0}\right)}\right) \\
= & \left(1+a^{\left(\frac{1}{1}\right)}\right)\left(1-a^{\left(\frac{1}{1}\right)}\right) \\
= & (1+a)(1-a) \\
= & (1-a^2)
\end{aligned}
$$

ดังนั้น $\left(1+a^{\left(\frac{1}{2^0}\right)}\right)\left(1+a^{\left(\frac{1}{2^1}\right)}\right)\left(1+a^{\left(\frac{1}{2^2}\right)}\right)\ldots\left(1+a^{\left(\frac{1}{2^{(n-2)}}\right)}\right)\left(1+a^{\left(\frac{1}{2^{(n-1)}}\right)}\right)\left(1-a^{\left(\frac{1}{2^{(n-1)}}\right)}\right) = (1-a^2)$

ในทำนองเดียวกัน

จะได้ว่า $\left(a^{\left(\frac{1}{2^0}\right)}+1\right)\left(a^{\left(\frac{1}{2^1}\right)}+1\right)\left(a^{\left(\frac{1}{2^2}\right)}+1\right)\ldots\left(a^{\left(\frac{1}{2^{(n-2)}}\right)}+1\right)\left(a^{\left(\frac{1}{2^{(n-1)}}\right)}+1\right)\left(a^{\left(\frac{1}{2^{(n-1)}}\right)}-1\right) = (a^2-1)$

ตัวอย่าง 98. $(1+7)\left(1+7^{\frac{1}{2}}\right)\left(1+7^{\frac{1}{4}}\right)\ldots\left(1+7^{\frac{1}{128}}\right)\left(1-7^{\frac{1}{128}}\right) = \left(1-7^2\right) = 1-49 = -48$

ตัวอย่าง 99. $(7+1)\left(7^{\frac{1}{2}}+1\right)\left(7^{\frac{1}{4}}+1\right)\ldots\left(7^{\frac{1}{128}}+1\right)\left(7^{\frac{1}{128}}-1\right) = \left(7^2-1\right) = 49-1 = 48$

3.7 สมบัติของรากที่ n ของจำนวนจริง

$\forall m, n \in \mathbb{Z}^+$ ที่ $n > 1$ และ $a, b \in \mathbb{R}, b \neq 0$ จะได้ว่า

1. $(\sqrt[n]{a})^n = a$ เมื่อ $\sqrt[n]{a}$ เป็นจำนวนจริง

2. $\sqrt[n]{a^n} = \begin{cases} a & \text{เมื่อ } a \geq 0 \\ a & \text{เมื่อ } a < 0 \text{ และ } n \text{ เป็นจำนวนคี่บวก} \\ |a| & \text{เมื่อ } a < 0 \text{ และ } n \text{ เป็นจำนวนคู่บวก} \end{cases}$

นักเรียนควรทราบ 11 สำหรับ $a \in \mathbb{R}, n \in \mathbb{Z}$ จะได้ว่า $\sqrt[n]{a}$ เป็น $\begin{cases} \textbf{รากคี่} & \text{เมื่อ } n \text{ เป็นจำนวนเต็มคี่} \\ \textbf{รากคู่} & \text{เมื่อ } n \text{ เป็นจำนวนเต็มคู่} \end{cases}$

- ถ้า $\sqrt[n]{a}$ เป็นรากคี่ แล้ว $a \in \mathbb{R}$ (a เป็นได้ทั้งจำนวนจริงลบ หรือ 0 หรือ จำนวนจริงบวก)
- ถ้า $\sqrt[n]{a}$ เป็นรากคู่ แล้ว $a \in \mathbb{R} - \mathbb{R}^-$ ($a \geq 0$ เท่านั้น และ a ต้องไม่ติดลบ)

3. $\sqrt[n]{ab} = \sqrt[n]{a}\sqrt[n]{b}$

4. $\sqrt[n]{\dfrac{a}{b}} = \dfrac{\sqrt[n]{a}}{\sqrt[n]{b}}$

5. $\sqrt[n]{a} = a^{\frac{1}{n}}$

6. $\sqrt[n]{a^m} = (a^m)^{\frac{1}{n}} = a^{\frac{m}{n}}$

7. $\sqrt[n]{(ab)^m} = \sqrt[n]{a^m b^m} = \sqrt[n]{a^m}\sqrt[n]{b^m} = (a^{\frac{m}{n}})(b^{\frac{m}{n}}) = (ab)^{\frac{m}{n}}$

8. $\sqrt[n]{\left(\dfrac{a}{b}\right)^m} = \dfrac{\sqrt[n]{a^m}}{\sqrt[n]{b^m}} = \dfrac{a^{\frac{m}{n}}}{b^{\frac{m}{n}}} = \left(\dfrac{a}{b}\right)^{\frac{m}{n}}$

ตัวอย่าง 100. $(\sqrt[3]{6})^3 = 6$

ตัวอย่าง 101. $(\sqrt[4]{3})^4 = 3$

ตัวอย่าง 102. $(\sqrt[7]{-16})^7 = -16$

ตัวอย่าง 103. $\left(\sqrt[6]{\dfrac{3}{7}}\right)^6 = \dfrac{3}{7}$

ตัวอย่าง 104. $\left(\sqrt[7]{-\dfrac{2}{5}}\right)^7 = -\dfrac{2}{5}$

ตัวอย่าง 105. $\sqrt{3 \times 4} = \sqrt{3} \times \sqrt{4} = 3^{\frac{1}{2}} \times 4^{\frac{1}{2}}$

ตัวอย่าง 106. $\sqrt[5]{-6 \times 3} = \sqrt[5]{-6} \times \sqrt[5]{3} = (-6)^{\frac{1}{5}} \times 3^{\frac{1}{5}}$

ตัวอย่าง 107. $\sqrt[5]{\dfrac{1}{2} \times \dfrac{3}{4}} = \sqrt[5]{\dfrac{1}{2}} \times \sqrt[5]{\dfrac{3}{4}} = \left(\dfrac{1}{2}\right)^{\frac{1}{5}} \times \left(\dfrac{3}{4}\right)^{\frac{1}{5}}$

ตัวอย่าง 108. $\sqrt[3]{(4\times 5)^2}=\sqrt[3]{4^2\times 5^2}=\sqrt[3]{4^2}\times\sqrt[3]{5^2}=4^{\frac{2}{3}}\times 5^{\frac{2}{3}}$

ตัวอย่าง 109. $\sqrt[3]{\frac{4}{7}}=\frac{\sqrt[3]{4}}{\sqrt[3]{7}}=\frac{4^{\frac{1}{3}}}{7^{\frac{1}{3}}}$

ตัวอย่าง 110. $\sqrt[6]{\frac{3}{5}}=\frac{\sqrt[6]{3}}{\sqrt[6]{5}}=\frac{3^{\frac{1}{6}}}{5^{\frac{1}{6}}}$

ตัวอย่าง 111. $\sqrt[5]{-\frac{2}{9}}=\frac{\sqrt[5]{-2}}{\sqrt[5]{9}}=\frac{\sqrt[5]{2}}{\sqrt[5]{-9}}=\frac{2^{\frac{1}{5}}}{(-9)^{\frac{1}{5}}}=\frac{(-2)^{\frac{1}{5}}}{9^{\frac{1}{5}}}$

ตัวอย่าง 112. $\sqrt[5]{\left(\frac{2}{3}\right)^4}=\frac{\sqrt[5]{2^4}}{\sqrt[5]{3^4}}=\left(\frac{2}{3}\right)^{\frac{4}{5}}=\frac{2^{\frac{4}{5}}}{3^{\frac{4}{5}}}$

ตัวอย่าง 113. $\sqrt[3]{4^2}=4^{\frac{2}{3}}$

นักเรียนควรทราบ 12 สำหรับ $a\in\mathbb{R}$ จะได้ว่า $\sqrt[n]{a^n}=\begin{cases} a & \text{เมื่อ } n \text{ เป็นจำนวนเต็มบวกคี่} \\ |a| & \text{เมื่อ } n \text{ เป็นจำนวนเต็มบวกคู่}\end{cases}$

นักเรียนควรทราบ 13 สำหรับ $a\in\mathbb{R}$ จะได้ว่า $|a|=\begin{cases} a & \text{เมื่อ } a\ge 0 \\ |a| & \text{เมื่อ } a<0\end{cases}$

นักเรียนควรทราบ 14 สำหรับ $a,b\in\mathbb{R}$ จะได้ว่า $\sqrt[n]{a+b}\neq\sqrt[n]{a}+\sqrt[n]{b}$ และ $\sqrt[n]{a-b}\neq\sqrt[n]{a}-\sqrt[n]{b}$

ตัวอย่าง 114. $\sqrt{6^2}=|6|=6$

ตัวอย่าง 115. $\sqrt{(-3)^2}=|-3|=3$

ตัวอย่าง 116. $\sqrt[4]{5^4}=|5|=5$

ตัวอย่าง 117. $\sqrt[4]{\left(\frac{5}{3}\right)^4}=\left|\frac{5}{3}\right|=\frac{5}{3}$

ตัวอย่าง 118. $\sqrt[5]{\left(-\frac{3}{5}\right)^5}=-\frac{5}{3}$

ตัวอย่าง 119. $\sqrt[8]{\left(-\frac{2}{3}\right)^8}=\left|-\frac{2}{3}\right|=\frac{2}{3}$

ตัวอย่าง 120. $\sqrt[4]{\left(-\frac{3x^2}{5}\right)^4}=\left|-\frac{3x^2}{5}\right|=\frac{3x^2}{5}$

ตัวอย่าง 121. กำหนดให้ $x<-5$ แล้ว $|x|=-x$ (ตามนิยาม)

ตัวอย่าง 122. กำหนดให้ $x\ge 0$ แล้ว $|x|=x$ (ตามนิยาม)

3.8 แบบฝึกหัดที่ 1.8

คำสั่ง จงเขียนจำนวนต่อไปนี้ให้อยู่ในรูปอย่างง่าย

ตัวอย่าง $(\sqrt[3]{-2})^3 = \left((-2)^{\frac{1}{3}}\right)^3 = (-2)^{\frac{3}{3}} = (-2)^1 = -2$

1. $(\sqrt[8]{18})^8$ ....
2. $(\sqrt{4})^2$ ....
3. $(\sqrt[3]{3})^3$ ....
4. $(\sqrt[3]{-5})^3$ ....
5. $(\sqrt[3]{-5a})^3$ ....
6. $(\sqrt{56})^2$ ....
7. $(\sqrt[7]{-45})^7$ ....
8. $(\sqrt[3]{-abc})^3$ ....
9. $(\sqrt[6]{a+b})^6$ เมื่อ $a, b \in \mathbb{Z}^+$ ....
10. $(\sqrt{a-b})^2$ เมื่อ $a - b \geq 0$ ....
11. $(\sqrt[4]{3x^2})^4$ ....
12. $(\sqrt[5]{-4x^2y^5})^5$ ....
13. $(\sqrt{0.121})^2$ ....
14. $(\sqrt{1.44})^2$ ....
15. $(\sqrt[5]{-2.43})^5$ ....
16. $\left(\sqrt{\frac{2}{3}}\right)^2$ ....
17. $\left(\sqrt[3]{-\frac{4}{5}}\right)^3$ ....
18. $\left(\sqrt[5]{\frac{2}{11}}\right)^5$ ....
19. $\left(\sqrt[5]{\frac{3x+1}{2}}\right)^5$ ....
20. $\left(\sqrt[4]{\frac{x-1}{1-x}}\right)^4$ เมื่อ $x \neq 1$ ....

3.9 แบบฝึกหัดที่ 1.9

คำสั่ง จงเขียนจำนวนต่อไปนี้ให้อยู่ในรูปผลคูณของเลขยกกำลัง

ตัวอย่าง $\sqrt{3x} = \sqrt{3} \cdot \sqrt{x} = 3^{\frac{1}{2}} \cdot x^{\frac{1}{2}}$

ตัวอย่าง $\sqrt[3]{3x \times 4} = \sqrt[3]{3} \cdot \sqrt[3]{x} \cdot \sqrt[3]{4} = 3^{\frac{1}{3}} \cdot x^{\frac{1}{3}} \cdot 4^{\frac{1}{3}}$

1. $\sqrt[3]{4 \times 6} =$ ....
2. $\sqrt[3]{9 \times (-3)} =$ ....
3. $\sqrt{4 \times 7} =$ ....
4. $\sqrt{4(x+2)} =$ ....
5. $\sqrt{(x-3)(x+3)} =$ ....
6. $\sqrt{(2x-1)(x+5)^3} =$ ....
7. $\sqrt[5]{(-3) \times (-4)} =$ ....
8. $\sqrt[6]{xy^2z^3} =$ ....
9. $\sqrt[4]{16a^4b^4} =$ ....
10. $\sqrt[4]{256a^8b^{12}} =$ ....
11. $\sqrt[7]{\left(\frac{2}{5}\right) \cdot \left(\frac{3}{4}\right)} =$ ....
12. $\sqrt[5]{\left(-\frac{3}{4}\right) \cdot \left(-\frac{y}{5}\right)} =$ ....
13. $\sqrt[4]{\left(\frac{1}{8}\right) \cdot \left(\frac{2}{3}\right)} =$ ....
14. $\sqrt[4]{\left(\frac{1-x}{8}\right) \cdot \left(\frac{2+x}{3}\right)} =$ ....
15. $\sqrt[3]{\left(\frac{-2a}{3}\right) \cdot \left(\frac{2a}{3}\right)} =$ ....
16. $\sqrt[3]{\left(\frac{(-2a)^3}{3b^2}\right) \cdot \left(\frac{2b^2}{3a^3}\right)}$, เมื่อ $a, b \neq 0; =$ ....
17. $\sqrt[3]{\left(\frac{(2a-1)^3}{(1-3b)^2}\right) \cdot \left(-\frac{3b^2}{2a^3}\right)}$, เมื่อ $a \neq 0; =$ ....

3.10 แบบฝึกหัดที่ 1.10

1.10-1 คำสั่ง จงเขียนจำนวนต่อไปนี้ให้อยู่ในรูปผลหารของเลขยกกำลัง

ตัวอย่าง $\sqrt{\frac{2}{3}} = \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{3}}$

1. $\sqrt{\frac{2}{5}}$ ....

2. $\sqrt[3]{-\frac{3}{8}}$ ....

3. $\sqrt[4]{\frac{2-x}{5x}}$ เมื่อ $0 < x < 2$ ....

4. $\sqrt{\frac{2a^2}{3}}$ ....

5. $\sqrt[3]{\frac{2-a^3}{4}}$ ....

1.10-2 คำสั่ง จงเขียนจำนวนต่อไปนี้ให้อยู่ในรูปอย่างง่าย

ตัวอย่าง $\sqrt{2^2} = |2| = 2$

ตัวอย่าง $\sqrt{(-3)^2} = |-3| = 3$

1. $\sqrt[3]{(-5)^3}$ ....

2. $\sqrt[4]{(-6)^4}$ ....

3. $\sqrt{(2x)^2}$ ....

4. $\sqrt{(2x^2)^2}$ ....

5. $\sqrt{6^2}$ ....

6. $\sqrt{(-6)^2}$ ....

7. $\sqrt{(x+y)^2}$ ....

8. $\sqrt[5]{(x+y)^5}$ ....

9. $\sqrt[4]{(x^4-y^4)^4}$ ....

10. $\sqrt{((-a)b(-c))^2}$ ....

11. $\sqrt{(2x-\sqrt{y})^2}$ ....

12. $\sqrt[8]{\left(\sqrt{2x-\sqrt{y}}\right)^8}$ ....

3.11 ตัวอย่างกรณีที่นักเรียนมักเข้าใจคลาดเคลื่อน

นักเรียนควรสังเกตว่า

1. พิจารณา

นักเรียนควรทราบ 15 สำหรับ $a, b \in \mathbb{R}^+$ จะได้ว่า $\sqrt[\text{คู่}]{a \cdot b} = \sqrt[\text{คู่}]{(-a) \cdot (-b)} = \sqrt[\text{คู่}]{a} \cdot \sqrt[\text{คู่}]{b}$

นักเรียนควรทราบ 16 สำหรับ $a, b \in \mathbb{R}^+$ จะได้ว่า $\sqrt[\text{คู่}]{(-a) \cdot (-b)} \neq \sqrt[\text{คู่}]{-a} \cdot \sqrt[\text{คู่}]{-b}$

$\sqrt{(-3) \cdot (-2)} = \sqrt{6} = \sqrt{2} \cdot \sqrt{3}$ แต่ $\sqrt{(-3) \cdot (-2)} \neq \sqrt{-3} \cdot \sqrt{-2}$
เพราะว่า **ตัวที่ถูกถอดกรณ์ในรากคู่ห้ามติดลบ**

ตัวอย่าง 123. $\sqrt{(-2) \cdot (-4)} \neq \sqrt{-2} \cdot \sqrt{-4}$

ตัวอย่าง 124. $\sqrt[4]{(-3) \cdot (-5)} \neq \sqrt[3]{-3} \cdot \sqrt[3]{-5}$

2. **นักเรียนควรทราบ 17** สำหรับ $a, b \in \mathbb{R}^+$ จะได้ว่า $\sqrt[\text{คี่}]{(-a) \cdot (-b)} = \sqrt[\text{คี่}]{-a} \cdot \sqrt[\text{คี่}]{-b}$

ตัวอย่าง 125. $\sqrt[3]{(-2) \cdot (-4)} = \sqrt[3]{-2} \cdot \sqrt[3]{-4}$

ตัวอย่าง 126. $\sqrt[5]{(-3) \cdot (-4)} = \sqrt[5]{-3} \cdot \sqrt[5]{-4}$

ตัวอย่าง 127. $\sqrt[7]{(-1) \cdot (-2)} = \sqrt[7]{-1} \cdot \sqrt[7]{-2}$

3. จากกรอบ **นักเรียนควรทราบ 14** เราทราบว่า

สำหรับ $a, b \in \mathbb{R}$ จะได้ว่า $\sqrt[n]{a+b} \neq \sqrt[n]{a} + \sqrt[n]{b}$ และ $\sqrt[n]{a-b} \neq \sqrt[n]{a} - \sqrt[n]{b}$

ตัวอย่าง 128. $\sqrt{2+4} \neq \sqrt{2} + \sqrt{4}$

ตัวอย่าง 129. $\sqrt[3]{5+4} \neq \sqrt[3]{5} + \sqrt[3]{4}$

ตัวอย่าง 130. $\sqrt[4]{4-3} \neq \sqrt[4]{4} - \sqrt[4]{3}$

4. **นักเรียนควรทราบ 18** สำหรับ $a, b \in \mathbb{R}$ จะได้ว่า $(a-b)^{\text{คู่}} = (b-a)^{\text{คู่}}$

ตัวอย่าง 131. $(4-2)^2 = 2^2 = 4 = (-2)^2 = (2-4)^2$

ตัวอย่าง 132. $(2-1)^4 = 1^4 = 1 = (-1)^4 = (1-2)^4$

ตัวอย่าง 133. $(x-y)^6 = (y-x)^6$

5. **นักเรียนควรทราบ 19** สำหรับ $a, b \in \mathbb{R}$ จะได้ว่า $(a-b)^{\text{คี่}} \neq (b-a)^{\text{คี่}}$

ตัวอย่าง 134. $(4-2)^3 = 2^3 = 8 \neq -8 = (-2)^3 = (2-4)^3$

ตัวอย่าง 135. $(2-1)^5 = 1^5 = 1 \neq -1 = (-1)^5 = (1-2)^5$

ตัวอย่าง 136. $(x-y)^7 \neq (y-x)^7$

6. **นักเรียนควรทราบ 20** สำหรับ $a, b \in \mathbb{R}$ จะได้ว่า $(a-b)^{\text{คี่}} = -(b-a)^{\text{คี่}}$

ตัวอย่าง 137. $(4-2)^3 = 2^3 = 8 = -(-8) = -(-2)^3 = -(2-4)^3$

ตัวอย่าง 138. $(2-1)^5 = 1^5 = 1 = -(-1) = -(-1)^5 = -(1-2)^5$

ตัวอย่าง 139. $(x-y)^7 = -(y-x)^7$

7. **นักเรียนควรทราบ 21** สำหรับ $a \in \mathbb{R}, m, n \in \mathbb{Z}^+$ จะได้ว่า $(a^m)^n = a^{mn} = a^{nm} = (a^n)^m$

ตัวอย่าง 140. $\left(2^3\right)^4 = 2^{3\times 4} = 2^{4\times 3} = \left(2^3\right)^4$

ตัวอย่าง 141. $\left((-2)^3\right)^4 = (-2)^{3\times 4} = (-2)^{4\times 3} = \left((-2)^3\right)^4$

3.12 การถอดกรณฑ์ที่ n

ตัวอย่าง 142. จงหาค่าของ $\sqrt{8}$

<u>วิธีทำ</u>
$$\begin{aligned}\sqrt{8} &= \sqrt{2\times 2\times 2}\\ &= \sqrt{2^2\times 2}\\ &= \sqrt{2^2}\cdot\sqrt{2}\\ &= |2|\cdot\sqrt{2}\\ &= 2\sqrt{2}\end{aligned}$$

ตัวอย่าง 143. จงหาค่าของ $\sqrt[3]{-27x^6}$

<u>วิธีทำ</u>
$$\begin{aligned}\sqrt[3]{-27x^6} &= \sqrt[3]{(-3)\cdot(-3)\cdot(-3)\cdot x^2\cdot x^2\cdot x^2}\\ &= \sqrt[3]{(-3)^3\cdot\left(x^2\right)^3}\\ &= \sqrt[3]{(-3)^3}\cdot\sqrt[3]{\left(x^2\right)^3}\\ &= -3x^2\end{aligned}$$

ตัวอย่าง 144. จงหาค่าของ $\sqrt[4]{32x^7}$

<u>วิธีทำ</u>
$$\begin{aligned}\sqrt[4]{32x^7} &= \sqrt[4]{2\cdot 2\cdot 2\cdot 2\cdot 2\cdot x^4\cdot x^3}\\ &= \sqrt[4]{2^4\cdot 2\cdot x^4\cdot x^3}\\ &= |2|\cdot\sqrt[4]{2}\cdot|x|\cdot\sqrt[4]{x^3}\\ &= 2\cdot\sqrt[4]{2}\cdot|x|\cdot\sqrt[4]{x^3}\\ &= 2\cdot|x|\cdot\sqrt[4]{2}\cdot\sqrt[4]{x^3}\\ &= 2|x|\cdot\sqrt[4]{2x^3}\\ &= 2|x|\sqrt[4]{2x^3}\end{aligned}$$

3.13 กรณฑ์ที่เหมือนกัน

นิยาม 145. สำหรับ $n \in \mathbb{Z}^+$ จะเรียก $\sqrt[n]{\blacksquare}$ ว่า **กรณฑ์ที่** n **ของ** $\blacksquare$

- สำหรับ $k \in \mathbb{R}$ ซึ่ง $k\sqrt[n]{\blacksquare}$ เรียก k ว่า **สัมประสิทธิ์**
- เรียก n ว่า **อันดับของกรณฑ์**
- เรียก $\blacksquare$ ว่า **ตัวที่ถูกถอดกรณฑ์**

นิยาม 146. กรณฑ์ที่เหมือนกัน หมายถึง

1. กรณฑ์ที่มีอันดับของกรณฑ์เป็นอันดับเดียวกัน และ
2. มีจำนวนที่ถูกถอดกรณฑ์เป็นจำนวนเดียวกัน และ
3. มีสัมประสิทธิ์เหมือนหรือต่างกันก็ได้

ตัวอย่าง 147. กรณฑ์อับดับสองที่เหมือนกัน เช่น $2\sqrt{2}$, $\sqrt{2}$, $-3\sqrt{2}$, $\frac{1}{2}\sqrt{2}$, $-\frac{2}{3}\sqrt{2}$, $1.34\sqrt{2}$

ตัวอย่าง 148. กรณฑ์อับดับสามที่เหมือนกัน เช่น $2\sqrt[3]{2}$, $\sqrt[3]{2}$, $-3\sqrt[3]{2}$, $\frac{1}{2}\sqrt[3]{2}$, $-\frac{2}{3}\sqrt[3]{2}$, $1.34\sqrt[3]{2}$

ตัวอย่าง 149. กรณฑ์ที่ต่างกัน เช่น $\sqrt{4}$ กับ $\sqrt[3]{3}$ เพราะ อันดับของกรณฑ์และตัวที่ถูกถอดกรณฑ์ต่างกัน

ตัวอย่าง 150. กรณฑ์ที่ต่างกัน เช่น $\sqrt{4}$ กับ $\sqrt[3]{4}$ เพราะ อันดับของกรณฑ์ต่างกัน

ตัวอย่าง 151. กรณฑ์ที่ต่างกัน เช่น $\sqrt{4}$ กับ $\sqrt{3}$ เพราะ ตัวที่ถูกถอดกรณฑ์ต่างกัน

3.14 แบบฝึกหัดที่ 1.11

1.11-1 คำสั่ง จงเขียนจำนวนต่อไปนี้ให้อยู่ในรูปอย่างง่าย

ตัวอย่าง $\sqrt{12} = \sqrt{2^2 \cdot 3} = \sqrt{2^2} \cdot \sqrt{3} = |2| \cdot \sqrt{3} = 2\sqrt{3}$

1. $\sqrt{18}$ ....
2. $\sqrt{1000}$ ....
3. $\sqrt{20x^2}$ ....
4. $\sqrt{40x^3y^4}$ ....
5. $\sqrt[3]{135}$ ....
6. $\sqrt[3]{-16x^3y^5}$ ....
7. $\sqrt[3]{\frac{-64x^7y^2}{27}}$ ....

8. $\sqrt[4]{128x^6}$ ....

9. $\sqrt[4]{(x-y)^4}$ ....

10. $\sqrt[4]{(x^4-y^4)^8}$ ....

จากแบบฝึกหัดที่ 3.9 ข้อ 9 และ 10 จะพบว่า |a -b| = |b - a| เมื่อ $a, b \in \mathbb{R}$

1.11-2 คำสั่ง จงระบุว่ากรณฑ์ของจำนวนต่อไปนี้ **เหมือนกัน** หรือ **ต่างกัน** พร้อมทั้งให้เหตุผลประกอบ

ตัวอย่าง $\sqrt{3}$ กับ $\sqrt[3]{2}$ เป็นกรณฑ์ที่ต่างกัน เพราะ อันดับของกรณฑ์และตัวที่ถูกถอดกรณฑ์ต่างกัน

ตัวอย่าง $\sqrt{2}$ กับ $\sqrt[3]{2}$ เพราะ อันดับของกรณฑ์ต่างกัน

ตัวอย่าง $\sqrt[5]{3}$ กับ $6\sqrt[5]{3}$ เป็นกรณฑ์ที่เหมือนกัน เพราะ อันดับของกรณฑ์และตัวที่ถูกถอดกรณฑ์เหมือนกัน

1. $\sqrt{2}$ กับ $\sqrt[3]{2}$ ....

2. $\frac{1}{3}\sqrt[5]{-7}$ กับ $0.001\sqrt[7]{-7}$ ....

3. $2\sqrt[3]{3}$ กับ $3\sqrt[3]{2}$ ....

4. $\sqrt[4]{2}$ กับ $x\sqrt[4]{2}$ ....

5. $3\sqrt[3]{4}$ กับ $3\sqrt[4]{3}$ ....

6. $\frac{2}{7}\sqrt[3]{2}$ กับ $5\sqrt[4]{9}$ ....

7. $\frac{1}{2}\sqrt[4]{2}$ กับ $\frac{5}{4}\sqrt[4]{2}$ ....

8. $\frac{2}{7}(x-y)\sqrt[3]{x+y}$ กับ $\frac{7}{2}(y-x)\sqrt[3]{y+x}$ ....

9. $3\sqrt[5]{ax^2+bx+c}$ กับ $-3\sqrt[4]{x}$ เมื่อ $x \geq 0$..........

10. $\sqrt[3]{\frac{-b \pm \sqrt{b^2-4ac}}{2a}}$ กับ $\sqrt[3]{\frac{-b \pm \sqrt{-4ac+b^2}}{2a}}$ เมื่อ $a \geq 0$..........

3.15 การบวก ลบ จำนวนที่อยู่ในรูปกรณฑ์

หลักการ 152. พิจารณาดังนี้

1. จำนวนที่อยู่ในรูปกรณฑ์ที่สามารถนำมา **บวก ลบ**กันได้ ต้องเป็น**กรณฑ์ที่เหมือนกัน**เท่านั้น

2. **การบวก ลบ กรณฑ์ที่เหมือนกัน** ทำได้โดย การนำเอา**สัมประสิทธิ์ของกรณฑ์**แต่ละจำนวนมาดำเนินการบวก ลบกันตามปกติ

3. จำนวนที่อยู่ในรูป**กรณฑ์ที่ต่างกัน นำมา บวก ลบกันไม่ได้**

สำหรับการบวก ลบ กรณฑ์ที่เหมือนกัน มีหลักการดังนี้

$$k_1\sqrt[n]{a}+k_2\sqrt[n]{a}=(k_1+k_2)\sqrt[n]{a} \quad \text{และ} \quad k_1\sqrt[n]{a}-k_2\sqrt[n]{a}=(k_1-k_2)\sqrt[n]{a}$$

เพิ่มเติม 1 $k_1\sqrt[n]{a}+k_2\sqrt[n]{a}+\ldots+k_m\sqrt[n]{a}=(k_1+k_2+\ldots+k_m)\sqrt[n]{a}=\sum_{i=1}^{m}k_i\sqrt[n]{a}$ และ

เพิ่มเติม 2 $k_1\sqrt[n]{a}-k_2\sqrt[n]{a}-\ldots-k_m\sqrt[n]{a}=(k_1-k_2-\ldots-k_m)\sqrt[n]{a}$

ตัวอย่าง 153. ผลลัพธ์ของ $2\sqrt{3}+\sqrt{3}-4\sqrt{3}=(2+1-4)\sqrt{3}=-\sqrt{3}$

ตัวอย่าง 154. ผลลัพธ์ของ $\frac{2}{4}\sqrt[3]{-5}+\frac{3}{6}\sqrt[3]{-5}-\frac{4}{8}\sqrt[3]{-5}=(\frac{2}{4}+\frac{3}{6}-\frac{4}{8})\sqrt[3]{-5}=\frac{1}{2}\sqrt[3]{-5}$

ตัวอย่าง 155. จงหาผลลัพธ์ของ $\sqrt{75}+\sqrt{48}-\sqrt{27}$

วิธีทำ

$$\begin{aligned}\sqrt{75}+\sqrt{48}-\sqrt{27} &= \sqrt{25\times 3}+\sqrt{16\times 3}-\sqrt{9\times 3}\\ &= \sqrt{5^2\times 3}+\sqrt{4^2\times 3}-\sqrt{3^2\times 3}\\ &= 5\sqrt{3}+4\sqrt{3}-2\sqrt{3}\\ &= (5+4-2)\sqrt{3}\\ &= 7\sqrt{3}\end{aligned}$$

ตัวอย่าง 156. จงหาผลลัพธ์ของ $(2a+b)\sqrt{2}-(a-2b)\sqrt{2}$

วิธีทำ

$$\begin{aligned}(2a+b)\sqrt{2}-(a-2b)\sqrt{2} &= [(2a+b)-(a-2b)]\sqrt{2}\\ &= (2a+b-a+2b)\sqrt{2}\\ &= (a+3b)\sqrt{2}\end{aligned}$$

ตัวอย่าง 157. จงหาผลลัพธ์ของ $\frac{x}{\sqrt{5}}-\sqrt{20}x+\frac{2x}{\sqrt{5}}$

วิธีทำ

$$\begin{aligned}\frac{x}{\sqrt{5}}-\sqrt{20}x+\frac{2x}{\sqrt{5}} &= \left(\frac{x}{\sqrt{5}}\cdot\frac{\sqrt{5}}{\sqrt{5}}\right)-\sqrt{4\cdot 5}x+\left(\frac{2x}{\sqrt{5}}\cdot\frac{\sqrt{5}}{\sqrt{5}}\right)\\ &= \frac{x\sqrt{5}}{5}-2x\sqrt{5}+\frac{2x\sqrt{5}}{5}\\ &= \left(\frac{x}{5}-2x+\frac{2x}{5}\right)\sqrt{5}\\ &= \left(\frac{x}{5}-\frac{10x}{5}+\frac{2x}{5}\right)\sqrt{5}\\ &= \left(\frac{x-10x+2x}{5}\right)\sqrt{5}\\ &= -\frac{7\sqrt{5}}{5}x\end{aligned}$$

ตัวอย่าง 158. จงหาผลลัพธ์ของ $2\sqrt{\frac{1}{10}} - 4\sqrt{\frac{5}{2}} + 3\sqrt{\frac{2}{5}} + \frac{1}{5}\sqrt{10}$

<u>วิธีทำ</u>

$$\begin{aligned}
2\sqrt{\frac{1}{10}} - 4\sqrt{\frac{5}{2}} + 3\sqrt{\frac{2}{5}} + \frac{1}{5}\sqrt{10} &= 2\sqrt{\frac{1}{10}\cdot\frac{10}{10}} - 4\sqrt{\frac{5}{2}\cdot\frac{2}{2}} + 3\sqrt{\frac{2}{5}\cdot\frac{5}{5}} + \frac{1}{5}\sqrt{10} \\
&= 2\sqrt{\frac{10}{10^2}} - 4\sqrt{\frac{10}{2^2}} + 3\sqrt{\frac{10}{5^2}} + \frac{1}{5}\sqrt{10} \\
&= \frac{2}{10}\sqrt{10} - \frac{4}{2}\sqrt{10} + \frac{3}{5}\sqrt{10} + \frac{1}{5}\sqrt{10} \\
&= \left(\frac{2}{10} - \frac{4}{2} + \frac{3}{5} + \frac{1}{5}\right)\sqrt{10} \\
&= \left(\frac{1}{5} - 2 + \frac{3}{5} + \frac{1}{5}\right)\sqrt{10} \\
&= \left(\frac{1}{5} - \frac{10}{5} + \frac{3}{5} + \frac{1}{5}\right)\sqrt{10} \\
&= \left(\frac{1 - 10 + 3 + 1}{5}\right)\sqrt{10} \\
&= -\frac{5}{5}\sqrt{10} \\
&= -\sqrt{10}
\end{aligned}$$

ตัวอย่าง 159. จงหาผลลัพธ์ของ $\sqrt[3]{192} + \sqrt{98} - \sqrt[3]{24} - \sqrt{18}$

<u>วิธีทำ</u>

$$\begin{aligned}
\sqrt[3]{192} + \sqrt{98} - \sqrt[3]{24} - \sqrt{18} &= \sqrt{98} - \sqrt{18} + \sqrt[3]{192} - \sqrt[3]{24} \\
&= \sqrt{49\cdot 2} - \sqrt{9\cdot 2} + \sqrt[3]{64\cdot 3} - \sqrt[3]{8\cdot 3} \\
&= \sqrt{7^2\cdot 2} - \sqrt{3^2\cdot 2} + \sqrt[3]{4^3\cdot 3} - \sqrt[3]{2^3\cdot 3} \\
&= 7\sqrt{2} - 3\sqrt{2} + 4\sqrt[3]{3} - 2\sqrt[3]{3} \\
&= (7\sqrt{2} - 3\sqrt{2}) + (4\sqrt[3]{3} - 2\sqrt[3]{3}) \\
&= (7-3)\sqrt{2} + (4-2)\sqrt[3]{3} \\
&= 4\sqrt{2} + 2\sqrt[3]{3} \\
&= 2(2\sqrt{2} + \sqrt[3]{3})
\end{aligned}$$

3.16 แบบฝึกหัดที่ 1.12

1.12-1 คำสั่ง จงเขียนจำนวนต่อไปนี้ให้อยู่ในรูปอย่างง่าย

1. $\sqrt{50}+\sqrt{32}-\sqrt{18}$ ....
2. $\sqrt{50}-\sqrt{32}+\sqrt{8}$ ....
3. $\sqrt{48}-\sqrt{27}+\sqrt{12}$ ....
4. $\sqrt{75}+\sqrt{108}-7\sqrt{3}$ ....
5. $\sqrt[3]{81}+\sqrt[3]{375}-\sqrt[3]{192}$ ....
6. $\sqrt[3]{16}-\sqrt[3]{81}+\sqrt[3]{256}$ ....
7. $\sqrt{9x^3}+\sqrt{16x^4}+\sqrt{x^7}$ ....
8. $4\sqrt{128}+\sqrt{162}-\sqrt{242}$ ....
9. $2a\sqrt{\dfrac{5}{a}}-5\sqrt{5a}+5\sqrt{\dfrac{a}{5}}$ ....
10. $3b\sqrt{\dfrac{7}{b}}-7\sqrt{7b}+7\sqrt{\dfrac{b}{7}}$ ....
11. $4c\sqrt{\dfrac{11}{c}}-11\sqrt{11c}+11\sqrt{\dfrac{c}{11}}$ ....
12. $(\sqrt{18}-\sqrt{32}-\sqrt{50})^2$ ....
13. $(\sqrt{18}+\sqrt{32}-\sqrt{50})^2$ ....
14. $(\sqrt{18}-\sqrt{32}+\sqrt{50})^2$ ....
15. $(\sqrt{18}+\sqrt{32}+\sqrt{50})^2$ ....
16. $\left(4c\sqrt{\dfrac{11}{c}}-11\sqrt{11c}+11\sqrt{\dfrac{c}{11}}\right)^2$ ....
17. $\left(3b\sqrt{\dfrac{7}{b}}-7\sqrt{7b}+7\sqrt{\dfrac{b}{7}}\right)^4$ ....
18. $\left(2a\sqrt{\dfrac{5}{a}}-5\sqrt{5a}+5\sqrt{\dfrac{a}{5}}\right)^6$ ....
19. $(\sqrt[3]{81}+\sqrt[3]{375}-\sqrt[3]{192})^3$ ....
20. $(\sqrt[3]{625}-\sqrt[3]{81}+\sqrt[3]{16})^3$ ....

การคูณ หาร **กรณีที่เหมือนกัน** มีหลักการดังนี้

$$k_1\sqrt[n]{a}\cdot k_2\sqrt[n]{a}\cdot\ldots\cdot k_m\sqrt[n]{a}=\prod_{i=1}^{m}k_i(\sqrt[n]{a})^m=\prod_{i=1}^{m}k_i\sqrt[n]{a^m}$$ และ $$\frac{k_1\sqrt[n]{a}}{k_2\sqrt[n]{a}}=\frac{k_1}{k_2}$$

การคูณ หาร กรณีที่มี**เลขดัชนีเหมือนกันแต่มีตัวที่ถูกถอดกรณฑ์ต่างกัน** มีหลักการดังนี้

$$k_1\sqrt[n]{a}\cdot k_2\sqrt[n]{b}=k_1k_2\cdot\sqrt[n]{ab}$$ และ $$\frac{k_1\sqrt[n]{a}}{k_2\sqrt[n]{b}}=\frac{k_1\sqrt[n]{a}}{k_2\sqrt[n]{b}}=\frac{k_1}{k_2}\sqrt[n]{\frac{a}{b}}$$

เพิ่มเติม 3 $$k_1\sqrt[n]{a_1}\cdot k_2\sqrt[n]{a_2}\cdot\ldots\cdot k_m\sqrt[n]{a_m}=k_1k_2\cdot\ldots\cdot k_m\sqrt[n]{a_1a_2\cdot\ldots\cdot a_m}=\prod_{i=1}^{m}k_i\sqrt[n]{\prod_{j=1}^{m}a_j}$$

การคูณ หาร กรณีที่มี**เลขดัชนีต่างกันแต่มีตัวที่ถูกถอดกรณฑ์เหมือนกัน** มีหลักการดังนี้

$$k_1\sqrt[m]{a}\cdot k_2\sqrt[n]{a}=k_1a^{(\frac{1}{m})}\cdot k_2a^{(\frac{1}{n})}=k_1k_2\cdot\left(a^{(\frac{1}{m})}\cdot a^{(\frac{1}{n})}\right)=k_1k_2a^{(\frac{1}{m}+\frac{1}{n})}$$

เพิ่มเติม 4 $$(k_1{}^{(n_1)}\sqrt{a})(k_2{}^{(n_2)}\sqrt{a})\ldots(k_m{}^{(nm)}\sqrt{a})=k_1k_2\ldots k_ma^{(\frac{1}{n_1}+\frac{1}{n_2}+\ldots+\frac{1}{nm})}=\prod_{i=1}^{m}k_i\cdot a^{\left(\sum_{j=1}^{m}\frac{1}{n_j}\right)}$$

และ $$\frac{k_1\sqrt[m]{a}}{k_2\sqrt[n]{a}}=\frac{k_1a^{\frac{1}{m}}}{k_2a^{\frac{1}{n}}}=\frac{k_1}{k_2}\cdot a^{(\frac{1}{m}-\frac{1}{n})}$$

การคูณ หาร กรณีที่มี**เลขดัชนีต่างกันและมีตัวที่ถูกถอดกรณฑ์ต่างกัน** ทำไม่ได้

1.12-2 คำสั่ง จงเขียนจำนวนต่อไปนี้ให้อยู่ในรูปอย่างง่าย

1. $3a\sqrt{\frac{3}{a}}+3\sqrt{3a}-3\sqrt{\frac{a}{3}}$ ....
2. $4a\sqrt{\frac{7}{a}}-7\sqrt{7a}+7\sqrt{\frac{a}{7}}$ ....
3. $5a\sqrt{\frac{2}{a}}-2\sqrt{2a}-2\sqrt{\frac{a}{2}}$ ....
4. $\sqrt{2}\cdot2\sqrt{3}\cdot3\sqrt{4}\cdot4\sqrt{5}\cdot5\sqrt{6}$ ....
5. $\sqrt[3]{2}\cdot2\sqrt[3]{3}\cdot3\sqrt[3]{4}\cdot4\sqrt[3]{5}\cdot5\sqrt[3]{6}$ ....
6. $\sqrt{3}\cdot(-2\sqrt{5})\cdot3\sqrt{6}\cdot(-4\sqrt{7})\cdot5\sqrt{8}$ ....
7. $\sqrt{2}\cdot2\sqrt[3]{3}\cdot3\sqrt[4]{4}\cdot4\sqrt[5]{5}\cdot5\sqrt[6]{6}$ ....
8. $\sqrt{2}\cdot2\sqrt{2}\cdot3\sqrt{2}\cdot4\sqrt{2}\cdot5\sqrt{2}$ ....
9. $3\sqrt{3}\cdot4\sqrt{3}\cdot5\sqrt{3}\cdot6\sqrt{3}\cdot7\sqrt{3}$ ....

ตัวอย่าง 160. $2\sqrt{3}(\sqrt{5}+\sqrt{10}) = 2\sqrt{3}\cdot\sqrt{5}+2\sqrt{3}\cdot\sqrt{10} = 2\sqrt{3\cdot 5}+2\sqrt{3\cdot 10} = 2\sqrt{15}+2\sqrt{30}$

ตัวอย่าง 161. $4\sqrt{5}(2\sqrt{10}-3\sqrt{5}) = 4\sqrt{5}\cdot 2\sqrt{10}-4\sqrt{5}\cdot 3\sqrt{5} = 8\sqrt{50}-12\sqrt{50} = -4\sqrt{50} = -20\sqrt{2}$

1.12-3 คำสั่ง จงเขียนจำนวนต่อไปนี้ให้อยู่ในรูปอย่างง่าย

1. $3\sqrt{2}(\sqrt{5}+\sqrt{50})$ ....
2. $\sqrt{18}(7\sqrt{2}-\sqrt{32})$ ....
3. $-\sqrt{72}(9\sqrt{2}+4\sqrt{50})$ ....
4. $4\sqrt[3]{5}(3\sqrt[3]{2}+4\sqrt[3]{3})$ ....
5. $-2\sqrt[3]{6}(-7\sqrt[3]{3}-5\sqrt[3]{5})$ ....
6. $3\sqrt{2}\left(\dfrac{\sqrt{5}}{\sqrt{2}}+\dfrac{\sqrt{50}}{\sqrt{18}}\right)$ ....
7. $-5\sqrt{2}\left(\dfrac{-3\sqrt{5}}{\sqrt{2}}+\dfrac{\sqrt{32}}{\sqrt{72}}\right)$ ....

4 เฉพาะรากที่สอง

นิยาม 162. ถ้า $x, y \in \mathbb{R}$ แล้ว y เป็นรากที่สอง(square root) ของ x ก็ต่อเมื่อ $y^2 = x$

ทฤษฎีบท 163. ถ้า $x \geq 0$ แล้ว $\sqrt{x^2} = x$

ข้อสังเกต 164. ถ้า $x \geq 0$ แล้ว $\pm\sqrt{x^2} = \pm x$

ข้อสังเกต 165. ถ้า $x \geq 0$ แล้ว $+\sqrt{x^2} = x$

ข้อสังเกต 166. ถ้า $x \geq 0$ แล้ว $-\sqrt{x^2} = -x$

ข้อสังเกต 167. ถ้า $x \geq 0$ แล้ว $\sqrt{x^2} = x$ (ตามทฤษฎี)

ข้อสังเกต 168. ถ้า $x < 0$ แล้ว $\sqrt{x^2} = -x$

ทฤษฎีบท 169. ถ้า $x \geq 0$ และ $y \geq 0$ แล้ว $\sqrt{x}\cdot\sqrt{y} = \sqrt{xy}$

ทฤษฎีบท 170. ถ้า $x \geq 0$ และ $y > 0$ แล้ว $\dfrac{\sqrt{x}}{\sqrt{y}} = \sqrt{\dfrac{x}{y}}$

ข้อสังเกต 171. ถ้า $x \geq 0$ จะได้ว่า $\sqrt{x} = x^{\frac{1}{2}}$

ข้อสังเกต 172. $\sqrt{0} = 0$ และ $\sqrt{1} = 1$

ข้อสังเกต 173. $\sqrt{(x-y)^2} = \sqrt{(y-x)^2} = |x-y| = |y-x|$

ข้อสังเกต 174. $\sqrt{\text{จำนวนจริงลบ}}$ ไม่มีราก(คำตอบ) ที่เป็นจำนวนจริง

4.1 การเขียนกรณฑ์ที่ n ของจำนวนจริงที่อยู่ในรูปเศษส่วนโดยที่ส่วนไม่ติดกรณฑ์

ตัวอย่าง 175. จงเขียน $\sqrt{\dfrac{8}{11}}$ ในรูปส่วนไม่ติดกรณฑ์

<u>วิธีทำ</u>
$$\begin{aligned}
\sqrt{\frac{8}{11}} &= \frac{\sqrt{8}}{\sqrt{11}} \\
&= \frac{\sqrt{8}}{\sqrt{11}} \cdot \frac{\sqrt{11}}{\sqrt{11}} \\
&= \frac{\sqrt{8}\cdot\sqrt{11}}{\sqrt{11}\cdot\sqrt{11}} \\
&= \frac{\sqrt{8\cdot 11}}{\sqrt{11^2}} \\
&= \frac{\sqrt{2^2\cdot 2\cdot 11}}{\sqrt{11^2}} \\
&= \frac{2\sqrt{22}}{11}
\end{aligned}$$

ตัวอย่าง 176. จงเขียน $\dfrac{\sqrt{3}}{\sqrt{7}}$ ในรูปส่วนไม่ติดกรณฑ์

<u>วิธีทำ</u>
$$\begin{aligned}
\frac{\sqrt{3}}{\sqrt{7}} &= \frac{\sqrt{3}}{\sqrt{7}} \cdot \frac{\sqrt{7}}{\sqrt{7}} \\
&= \frac{\sqrt{3}\cdot\sqrt{7}}{\sqrt{7}\cdot\sqrt{7}} \\
&= \frac{\sqrt{3\cdot 7}}{\sqrt{7^2}} \\
&= \frac{\sqrt{21}}{\sqrt{7^2}} \\
&= \frac{\sqrt{21}}{7}
\end{aligned}$$

ตัวอย่าง 177. จงเขียน $\dfrac{5\sqrt{3}}{2\sqrt{7}}$ ในรูปส่วนไม่ติดกรณฑ์

<u>วิธีทำ</u>
$$\begin{aligned}
\frac{5\sqrt{3}}{2\sqrt{7}} &= \frac{5}{2} \cdot \left(\frac{\sqrt{3}}{\sqrt{7}} \cdot \frac{\sqrt{7}}{\sqrt{7}}\right) \\
&= \frac{5}{2} \cdot \frac{\sqrt{21}}{\sqrt{7^2}} \\
&= \frac{5\sqrt{21}}{2\cdot|7|} \\
&= \frac{5\sqrt{21}}{14}
\end{aligned}$$

4.2 แบบฝึกหัดที่ 1.13

คำสั่ง จงเขียนจำนวนต่อไปนี้ให้อยู่ในรูปส่วนไม่ติดกรณฑ์

1. $\dfrac{\sqrt{3}}{\sqrt{6}}$ ....

2. $\dfrac{\sqrt{2}}{\sqrt{5}}$ ....

3. $\dfrac{\sqrt{5}}{\sqrt{7}}$ ....

4. $\dfrac{-\sqrt{7}}{\sqrt{5}}$ ....

5. $\dfrac{-\sqrt{2}}{\sqrt{3}}$ ....

6. $\dfrac{-\sqrt{5}}{\sqrt{2}}$ ....

7. $\dfrac{2\sqrt{7}}{\sqrt{5}}$ ....

8. $\dfrac{-3\sqrt{2}}{\sqrt{7}}$ ....

9. $\dfrac{-4\sqrt{2}}{\sqrt{3}}$ ....

10. $\dfrac{10\sqrt{2}}{\sqrt{5}}$ ....

11. $\dfrac{8\sqrt{3}}{3\sqrt{12}}$ ....

12. $\dfrac{-5\sqrt{2}}{\sqrt{3}}$ ....

13. $\dfrac{-20\sqrt{18}}{3\sqrt{75}}$ ....

14. $\dfrac{2\sqrt{3}+\sqrt{27}-\sqrt{48}}{-3\sqrt{2}}$ ....

15. $\dfrac{6\sqrt{5}+\sqrt{125}-\sqrt{80}}{4\sqrt{7}}$ ....

16. $\dfrac{9\sqrt{6}-6\sqrt{24}+2\sqrt{54}}{7\sqrt{5}}$ ....

4.3 ทบทวนการคูณรากที่สอง

4.3.1 การคูณแบบปกติ

พิจารณาผลคูณต่อไปนี้ เมื่อ $x, y \in \mathbb{R}$
จาก $(x_1 + x_2 + \ldots + x_n)(y_1 + y_2 + \ldots + y_n)$
$= (x_1y_1 + x_1y_2 + \ldots + x_1y_n) + (x_2y_1 + x_2y_2 + \ldots + x_2y_n) + \ldots + (x_ny_1 + x_ny_2 + \ldots + x_ny_n)$
$= \sum\limits_{\substack{i,j \\ 1 \le i \le j}}^{n} x_iy_j$

ตัวอย่าง 178. จงทำ $(2+\sqrt{2})(3+\sqrt{3})$ ให้อยู่ในรูปอย่างง่าย

วิธีทำ
$$\begin{aligned}(2+\sqrt{2})(3+\sqrt{3}) &= (2\cdot 3) + (2\cdot\sqrt{3}) + (3\cdot\sqrt{2}) + (\sqrt{2}\cdot\sqrt{3})\\ &= 6 + 2\sqrt{3} + 3\sqrt{2} + \sqrt{2\cdot 3}\\ &= 6 + 2\sqrt{3} + 3\sqrt{2} + \sqrt{6}\end{aligned}$$

ตัวอย่าง 179. จงทำ $(3-\sqrt{5})(2+\sqrt{6})$ ให้อยู่ในรูปอย่างง่าย

วิธีทำ
$$\begin{aligned}(3-\sqrt{5})(2+\sqrt{6}) &= (3\cdot 2) + (3\cdot\sqrt{6}) - (2\cdot\sqrt{5}) - (\sqrt{5}\cdot\sqrt{6})\\ &= 6 + 3\sqrt{6} - 2\sqrt{5} - \sqrt{5\cdot 6}\\ &= 6 + 3\sqrt{6} - 2\sqrt{5} - \sqrt{30}\end{aligned}$$

ตัวอย่าง 180. จงทำ $(5+\sqrt{3})(5-\sqrt{7})$ ให้อยู่ในรูปอย่างง่าย

วิธีทำ
$$\begin{aligned}(5+\sqrt{3})(5-\sqrt{7}) &= (5\cdot 5) - (5\cdot\sqrt{7}) + (5\cdot\sqrt{3}) - (\sqrt{3}\cdot\sqrt{7})\\ &= 25 - 5\sqrt{7} + 5\sqrt{3} - \sqrt{3\cdot 7}\\ &= 25 - 5\sqrt{7} + 5\sqrt{3} - \sqrt{21}\end{aligned}$$

ตัวอย่าง 181. จงทำ $(2-\sqrt{2})(5-\sqrt{5})$ ให้อยู่ในรูปอย่างง่าย

วิธีทำ
$$\begin{aligned}(2-\sqrt{2})(5-\sqrt{5}) &= (2\cdot 5) - (2\cdot\sqrt{5}) + (5\cdot\sqrt{2}) - (\sqrt{2}\cdot\sqrt{5})\\ &= 10 - 2\sqrt{5} - 5\sqrt{2} + \sqrt{2\cdot 5}\\ &= 10 - 2\sqrt{5} - 5\sqrt{2} + \sqrt{10}\end{aligned}$$

ตัวอย่าง 182. จงทำ $(4+\sqrt{50})(2+\sqrt{54})$ ให้อยู่ในรูปอย่างง่าย

วิธีทำ
$$\begin{aligned}(4+\sqrt{50})(2+\sqrt{54}) &= (4+5\sqrt{2})(2+3\sqrt{6})\\ &= (4\cdot 2) + (4\cdot 3\sqrt{6}) + (2\cdot 5\sqrt{2}) + (5\sqrt{2}\cdot 3\sqrt{6})\\ &= 8 + 12\sqrt{6} + 10\sqrt{2} + (5\cdot 3)\sqrt{2\cdot 6}\\ &= 8 + 12\sqrt{6} + 10\sqrt{2} + 15\sqrt{12}\\ &= 8 + 12\sqrt{6} + 10\sqrt{2} + (15\cdot 2)\sqrt{3}\\ &= 8 + 12\sqrt{6} + 10\sqrt{2} + 30\sqrt{3}\\ &= 2(4 + 6\sqrt{6} + 5\sqrt{2} + 15\sqrt{3})\end{aligned}$$

ตัวอย่าง 183. จงทำ $(2+\sqrt{2})(3+\sqrt{2})$ ให้อยู่ในรูปอย่างง่าย

<u>วิธีทำ</u>

$$\begin{aligned}(2+\sqrt{2})(3+\sqrt{2}) &= (2\cdot 3)+(2\cdot\sqrt{2})+(3\cdot\sqrt{2})+(\sqrt{2}\cdot\sqrt{2})\\ &= 6+2\sqrt{2}+3\sqrt{2}+\sqrt{2\cdot 2}\\ &= 6+2\sqrt{2}+3\sqrt{2}+\sqrt{4}\\ &= 6+(2+3)\sqrt{2}+2\\ &= 8+5\sqrt{2}\end{aligned}$$

ตัวอย่าง 184. จงทำ $(2\sqrt{3}+\sqrt{2})(3\sqrt{3}+\sqrt{2})$ ให้อยู่ในรูปอย่างง่าย

<u>วิธีทำ</u>

$$\begin{aligned}(2\sqrt{3}+\sqrt{2})(3\sqrt{3}+\sqrt{2}) &= (2\sqrt{3}\cdot 3\sqrt{3})+(2\sqrt{3}\cdot\sqrt{2})+(3\sqrt{3}\cdot\sqrt{2})+(\sqrt{2}\cdot\sqrt{2})\\ &= 6\sqrt{3\cdot 3}+2\sqrt{2\cdot 3}+3\sqrt{3\cdot 2}+\sqrt{2\cdot 2}\\ &= (6\cdot\sqrt{9})+2\sqrt{6}+3\sqrt{6}+\sqrt{4}\\ &= (6\cdot 3)+(2+3)\sqrt{6}+2\\ &= 18+5\sqrt{6}+2\\ &= 20+5\sqrt{6}\\ &= 5(4+\sqrt{6})\end{aligned}$$

ตัวอย่าง 185. จงทำ $(2\sqrt{8}+3\sqrt{32})(3\sqrt{32}+4\sqrt{75})$ ให้อยู่ในรูปอย่างง่าย

<u>วิธีทำ</u>

$$\begin{aligned}(2\sqrt{8}+3\sqrt{32})(3\sqrt{32}+4\sqrt{75}) &= (2\sqrt{8}\cdot 3\sqrt{32})+(2\sqrt{8}\cdot 4\sqrt{75})+\\ &\quad (3\sqrt{32}\cdot 3\sqrt{32})+(3\sqrt{32}\cdot 4\sqrt{75})\\ &= (2\cdot 2\sqrt{2}\cdot 3\cdot 4\sqrt{2})+(2\cdot 2\sqrt{2}\cdot 4\cdot 5\sqrt{3})+\\ &\quad (3\cdot\sqrt{32})^2+(3\cdot 4\sqrt{2}\cdot 4\cdot 5\sqrt{3})\\ &= (2\cdot 2\cdot 3\cdot 4(\sqrt{2})^2)+(2\cdot 2\cdot 4\cdot 5\sqrt{2\cdot 3})+\\ &\quad (9\cdot 32)+(3\cdot 4\cdot 4\cdot 5\sqrt{2\cdot 3})\\ &= 96+80\sqrt{6}+288+240\sqrt{6}\\ &= (96+288)+(80+240)\sqrt{6}\\ &= (96+288)+(80+240)\sqrt{6}\\ &= 384+(320)\sqrt{6}\end{aligned}$$

4.4 แบบฝึกหัดที่ 1.14

คำสั่ง <u>จงเขียนจำนวนต่อไปนี้ให้อยู่ในรูปอย่างง่าย</u>

1. $(4+\sqrt{2})(5+\sqrt{3})$ ....
2. $(3+\sqrt{8})(10+\sqrt{27})$ ....
3. $(3+\sqrt{24})(3+\sqrt{45})$ ....
4. $(\sqrt{2}+\sqrt{3})(\sqrt{5}+\sqrt{6})$ ....
5. $(3\sqrt{2}+5\sqrt{3})(2\sqrt{5}+3\sqrt{6})$ ....

6. $(\sqrt{32}+3\sqrt{5})(5\sqrt{18}-\sqrt{50})$ ....

7. $(9+\sqrt{3})(4-\sqrt{2})$ ....

8. $(9\sqrt{27}+\sqrt{3})(7\sqrt{20}-3\sqrt{2})$ ....

9. $(2\sqrt{5}+\sqrt{18})(4\sqrt{20}-2\sqrt{2})$ ....

10. $(2+\sqrt{8})(12-\sqrt{27})$ ....

11. $(\sqrt{2}-\sqrt{8})(\sqrt{12}+\sqrt{27})$ ....

12. $(3\sqrt{12}-3\sqrt{32})(5\sqrt{12}+\sqrt{18})$ ....

13. $(2\sqrt{27}-5\sqrt{8})(2\sqrt{12}+5\sqrt{18})$ ....

14. $(3\sqrt{27}-5\sqrt{75})(5\sqrt{27}+3\sqrt{75})$ ....

15. $(7\sqrt{28}-2\sqrt{75})(3\sqrt{50}+5\sqrt{18})$ ....

16. $(\sqrt{3}-2\sqrt{5})(3\sqrt{10}-\sqrt{3})$ ....

17. $(2\sqrt{5}-3\sqrt{3})(4\sqrt{5}-5\sqrt{7})$ ....

18. $(7\sqrt{7}-5\sqrt{5})(3\sqrt{3}-2\sqrt{2})$ ....

19. $(5\sqrt{28}-4\sqrt{50})(6\sqrt{32}-9\sqrt{20})$ ....

20. $(8\sqrt{8}-27\sqrt{27})(3\sqrt{12}-5\sqrt{50})$ ....

4.4.1 การคูณโดยใช้สูตร

พิจารณาผลคูณต่อไปนี้ เมื่อ $x, y \in \mathbb{R}$

1. จาก **ผลต่างกำลังสอง (different square)**, $x^2-y^2=(x-y)(x+y)$
   หรือ $(x-y)(x+y)=x^2-y^2$ และ $\forall x,y \geq 0$
   จะได้ว่า $\left(\sqrt{x}-\sqrt{y}\right)\left(\sqrt{x}+\sqrt{y}\right)=\left(\sqrt{x}\right)^2-\left(\sqrt{y}\right)^2=x-y$

2. จาก **ผลต่างกำลังสาม**, $x^3-y^3=(x-y)(x^2+xy+y^2)$ และ $\forall x,y \geq 0$ จะได้ว่า
   $\left(\sqrt{x}\right)^3-\left(\sqrt{y}\right)^3=\left(\sqrt{x}-\sqrt{y}\right)\left(\left(\sqrt{x}\right)^2+\sqrt{xy}+\left(\sqrt{y}\right)^2\right)=\left(\sqrt{x}-\sqrt{y}\right)\left(x+y+\sqrt{xy}\right)$

3. จาก **ผลบวกกำลังสาม**, $x^3+y^3=(x+y)(x^2-xy+y^2)$ และ $\forall x,y \geq 0$ จะได้ว่า
   $\left(\sqrt{x}\right)^3+\left(\sqrt{y}\right)^3=\left(\sqrt{x}+\sqrt{y}\right)\left(\left(\sqrt{x}\right)^2-\sqrt{xy}+\left(\sqrt{y}\right)^2\right)=\left(\sqrt{x}+\sqrt{y}\right)\left(x+y-\sqrt{xy}\right)$

4. **กำลังสองสมบูรณ์ (perfect square)**, $(x \pm y)^2=x^2 \pm 2xy+y^2$ และ $\forall x,y \geq 0$
   จะได้ว่า $\left(\sqrt{x} \pm \sqrt{y}\right)^2=\left(\sqrt{x}\right)^2 \pm 2\sqrt{x}\sqrt{y}+\left(\sqrt{y}\right)^2=x \pm 2\sqrt{xy}+y=x+y \pm \sqrt{xy}$

จาก กำลังสองสมบูรณ์ (*perfect square*) เราทราบว่า

$$\boxed{(\alpha+\beta)^2 = (\alpha+\beta)(\alpha+\beta) = \alpha^2+\beta^2+2\alpha\beta}$$

และ

$$\boxed{(\alpha-\beta)^2 = (\alpha-\beta)(\alpha-\beta) = \alpha^2+\beta^2-2\alpha\beta}$$

สังเกตสมการต่อไปนี้

$$(x+y)^2 = (x+y)(x+y) = x^2+y^2+2xy \tag{1}$$

ถ้าแทนค่า y ด้วย $y+z$ จะได้

$$(x+y)^2 = (x+(y+z))^2 = (x+(y+z))(x+(y+z)) = x^2+(y+z)^2+2x(y+z)$$

$$\text{ซึ่งจะได้ว่า} \quad (x+y+z)^2 = x^2+y^2+z^2+2xy+2xz+2yz \tag{2}$$

ในทำนองเดียวกัน ถ้าแทนค่า z ด้วย $z+w$ จะได้

$$(x+y+z+w)^2 = x^2+y^2+z^2+w^2+2xy+2xz+2xw+2yz+2yw+2zw \tag{3}$$

$\forall \alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n \in \mathbb{R}$ จะได้ว่า

$$\begin{aligned}
(\alpha_1+\alpha_2+\ldots+\alpha_n)^2 &= \alpha_1^2+\alpha_2^2+\ldots+\alpha_n^2+2\alpha_1\alpha_2+2\alpha_1\alpha_3+\ldots+2\alpha_1\alpha_n+ \\
&\quad 2\alpha_2\alpha_3+2\alpha_2\alpha_4+\ldots+2\alpha_2\alpha_n+\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots+ \\
&\quad 2\alpha_{(n-2)}\alpha_{(n-1)}+2\alpha_{(n-2)}\alpha_n+ \\
&\quad 2\alpha_{(n-1)}\alpha_n \\
&= (\alpha_1^2+\alpha_2^2+\ldots+\alpha_n^2)+ \\
&\quad (2\alpha_1\alpha_2+2\alpha_1\alpha_3+\ldots+2\alpha_1\alpha_n+ \\
&\quad 2\alpha_2\alpha_3+2\alpha_2\alpha_4+\ldots+2\alpha_2\alpha_n+ \\
&\quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots+ \\
&\quad 2\alpha_{(n-2)}\alpha_{(n-1)}+2\alpha_{(n-2)}\alpha_n+2\alpha_{(n-1)}\alpha_n) \\
&= \sum_{i=1}^{n}\alpha_i^2+2(\alpha_1\alpha_2+\alpha_1\alpha_3+\ldots+\alpha_1\alpha_n+\alpha_2\alpha_3+\alpha_2\alpha_4+\ldots+\alpha_2\alpha_n+ \\
&\quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots+ \\
&\quad \alpha_{(n-2)}\alpha_{(n-1)}+\alpha_{(n-2)}\alpha_n+\alpha_{(n-1)}\alpha_n) \\
&= \sum_{i=1}^{n}\alpha_i^2+2\Big((\alpha_1\alpha_2+\alpha_1\alpha_3+\ldots+\alpha_1\alpha_n)+ \\
&\quad (\alpha_2\alpha_3+\alpha_2\alpha_4+\ldots+\alpha_2\alpha_n)+ \\
&\quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots+ \\
&\quad (\alpha_{(n-2)}\alpha_{(n-1)}+\alpha_{(n-2)}\alpha_n)+\alpha_{(n-1)}\alpha_n\Big) \\
&= \sum_{i=1}^{n}\alpha_i^2+2\Big(\sum_{j=2}^{n}\alpha_1\alpha_j+\sum_{k=3}^{n}\alpha_2\alpha_k+\ldots+ \\
&\quad \sum_{l=n-1}^{n}\alpha_{(n-2)}\alpha_l+\alpha_{(n-1)}\alpha_n\Big) \\
&= \sum_{i=1}^{n}\alpha_i^2+2\sum_{\substack{j,k \\ 1\le j<k}}^{n}\alpha_j\alpha_k
\end{aligned}$$

ดังนั้น $(\alpha_1+\alpha_2+\ldots+\alpha_n)^2 = \sum_{i=1}^{n}\alpha_i^2 + 2\Big(\sum_{j=2}^{n}\alpha_1\alpha_j + \sum_{k=3}^{n}\alpha_2\alpha_k + \ldots + \sum_{l=n-1}^{n}\alpha_{(n-2)}\alpha_l + \alpha_{(n-1)}\alpha_n\Big)$

หรือ $(\alpha_1+\alpha_2+\ldots+\alpha_n)^2 = \sum_{i=1}^{n}\alpha_i^2 + 2\sum_{\substack{j,k\\1\le j<k}}^{n}\alpha_j\alpha_k$

ในทำนองเดียวกัน สังเกตสมการต่อไปนี้

$$(x-y)^2 = (x-y)(x-y) = x^2+y^2-2xy \tag{4}$$

ถ้าแทนค่า y ด้วย $y+z$ จะได้ $x-y = x-(y+z) = x-y-z$ ทำให้ได้ว่า

$$(x-y)^2 = (x-(y+z))^2 = (x-(y+z))(x-(y+z)) = x^2+(y+z)^2-2x(y+z)$$

ซึ่งจะได้ว่า $$(x-y-z)^2 = x^2+y^2+z^2-2xy-2xz+2yz \tag{5}$$

ในทำนองเดียวกัน ถ้าแทนค่า z ด้วย $z+w$ จะได้ $(x-y-(z+w)) = (x-y-z-w)$ ทำให้ได้ว่า

$$\begin{aligned}(x-y-(z+w))^2 &= x^2+y^2+(z+w)^2-2xy-2x(z+w)+2y(z+w)\\ &= x^2+y^2+(z^2+w^2+2zw)-2xy-(2xz+2xw)+(2yz+2yw)\\ &= x^2+y^2+z^2+w^2+2zw-2xy-2xz-2xw+2yz+2yw\\ &= x^2+y^2+z^2+w^2-2xy-2xz-2xw+2yz+2yw+2zw\\ &= \left(x^2+y^2+z^2+w^2\right)-(2xy+2xz+2xw)+(2yz+2yw+2zw)\\ &= \left(x^2+y^2+z^2+w^2\right)-2(xy+xz+xw)+2(yz+yw+zw)\\ &= \left(x^2+y^2+z^2+w^2\right)+2(yz+yw+zw)-2(xy+xz+xw)\\ &= \left(x^2+y^2+z^2+w^2\right)+2\left[(yz+yw+zw)-(xy+xz+xw)\right]\end{aligned}$$

ดังนั้น

$$(x-y-z-w)^2 = x^2+y^2+z^2+w^2-2xy-2xz-2xw+2yz+2yw+2zw$$

หรือ

$$(x-y-z-w)^2 = \left(x^2+y^2+z^2+w^2\right)+2\left[(yz+yw+zw)-(xy+xz+xw)\right] \tag{6}$$

$\forall\alpha_1,\alpha_2,\ldots,\alpha_n\in\mathbb{R}$ จะได้ว่า

$$\begin{aligned}(\alpha_1-\alpha_2-\ldots-\alpha_n)^2 = &\sum_{i=1}^{n}\alpha_i^2 + 2\Big(\sum_{j=3}^{n}\alpha_2\alpha_j + \sum_{k=4}^{n}\alpha_3\alpha_k + \ldots + \sum_{l=n-1}^{n}\alpha_{(n-2)}\alpha_l + \alpha_{(n-1)}\alpha_n\Big)\\ &-2\sum_{m=2}^{n}\alpha_1\alpha_m\\ = &\sum_{i=1}^{n}\alpha_i^2 + 2\left(\sum_{\substack{i,j\\2\le i<j}}^{n}\alpha_i\alpha_j - \sum_{k=2}^{n}\alpha_1\alpha_k\right)\end{aligned}$$

นั่นคือ

$$(\sqrt{\alpha_1}+\sqrt{\alpha_2}+\ldots+\sqrt{\alpha_n})^2=\sum_{i=1}^{n}\alpha_i+2\sum_{\substack{j,k\\1\leq j<k}}^{n}\sqrt{\alpha_j\alpha_k}$$

และ

$$(\sqrt{\alpha_1}-\sqrt{\alpha_2}-\ldots-\sqrt{\alpha_n})^2=\sum_{i=1}^{n}\alpha_i+2\left(\sum_{\substack{i,j\\2\leq i<j}}^{n}\sqrt{\alpha_i\alpha_j}-\sum_{k=2}^{n}\sqrt{\alpha_1\alpha_k}\right)$$

5. **กำลังสามสมบูรณ์**, $(x\pm y)^3=x^3\pm 3x^2y+3xy^2\pm y^3$ และ $\forall x,y\geq 0$ จะได้ว่า

$$\begin{aligned}(\sqrt{x}\pm\sqrt{y})^3 &= \left(\sqrt{x}\right)^3\pm 3\left(\sqrt{x}\right)^2\sqrt{y}+3\sqrt{x}\left(\sqrt{y}\right)^2\pm\left(\sqrt{y}\right)^3\\ &= x\sqrt{x}\pm 3x\sqrt{y}+3y\sqrt{x}\pm y\sqrt{y}\\ &= x\sqrt{x}\pm y\sqrt{y}+3y\sqrt{x}\pm 3x\sqrt{y}\\ &= x\sqrt{x}\pm y\sqrt{y}+3(y\sqrt{x}\pm x\sqrt{y})\end{aligned}$$

6. **กำลัง n สมบูรณ์**, พิจารณา**สามเหลี่ยมของปาสคาล**(Pascal's Triangle)

$$\begin{array}{ccccccccccc} & & & & & \binom{0}{0} & & & & & \\ & & & & \binom{1}{0} & & \binom{1}{1} & & & & \\ & & & \binom{2}{0} & & \binom{2}{1} & & \binom{2}{2} & & & \\ & & \binom{3}{0} & & \binom{3}{1} & & \binom{3}{2} & & \binom{3}{3} & & \\ & \binom{4}{0} & & \binom{4}{1} & & \binom{4}{2} & & \binom{4}{3} & & \binom{4}{4} & \\ \binom{5}{0} & & \binom{5}{1} & & \binom{5}{2} & & \binom{5}{3} & & \binom{5}{4} & & \binom{5}{5} \end{array}$$

ทฤษฎีบทอเนกนาม

ถ้า $n,n_1,n_2,\ldots,n_k$ เป็นจำนวนเต็มที่ไม่เป็นลบ และ $n=n_1+n_2+\cdots n_k$ แล้ว

$$\binom{n}{n_1,n_2\cdots n_k}=\frac{n!}{n_1!n_2!\cdots n_k!}$$

อาศัยทฤษฎีบทของ เดอ โพลิแนค เลอจองด์ (De-Polignac Legendre) จะได้ว่า

$$(x_1+x_2+\cdots+x_k)^n=\sum_{\substack{n_1+n_2+\cdots+n_k=n\\n_1,n_2,\ldots,n_k\geq 0}}x_1^{n_1}x_2^{n_2}\cdots x_k^{n_k}$$

4.5 สังยุค(conjugate)

4.6 รูปแบบพิเศษของรากที่สอง

ตัวอย่าง 186. จงหาค่าจำนวนเต็มบวก a และ b ที่ทำให้

$$\sqrt{5+\sqrt{24}} = \sqrt{a}+\sqrt{b}$$

<u>วิธีทำ</u> พิจารณา

$$5+\sqrt{24} = 3+2\sqrt{2\cdot 3}+2 = (\sqrt{2}+\sqrt{3})^2$$

ดังนั้น

$$\sqrt{5+2\sqrt{6}} = \sqrt{2}+\sqrt{3}$$

4.7 ปัญหาระคน

ตัวอย่าง 187. จงหาค่าของ $3^{\frac{1}{4}}\left(1+3^{\frac{1}{2}}+3^{\frac{3}{4}}\right)\left(3^{(-\frac{1}{4})}+3^{\frac{1}{4}}-3^{\frac{1}{2}}\right)$

<u>วิธีทำ</u>

$$\begin{aligned}
3^{\frac{1}{4}}\left(1+3^{\frac{1}{2}}+3^{\frac{3}{4}}\right)\left(3^{(-\frac{1}{4})}+3^{\frac{1}{4}}-3^{\frac{1}{2}}\right) &= \left(1+3^{\frac{1}{2}}+3^{\frac{3}{4}}\right)3^{\frac{1}{4}}\left(3^{(-\frac{1}{4})}+3^{\frac{1}{4}}-3^{\frac{1}{2}}\right)\\
&= \left(1+3^{\frac{1}{2}}+3^{\frac{3}{4}}\right)\left(3^{\frac{1}{4}}\cdot 3^{(-\frac{1}{4})}+3^{\frac{1}{4}}\cdot 3^{\frac{1}{4}}-3^{\frac{1}{4}}\cdot 3^{\frac{1}{2}}\right)\\
&= \left(1+3^{\frac{1}{2}}+3^{\frac{3}{4}}\right)\left(3^{\left(\frac{1}{4}+(-\frac{1}{4})\right)}+3^{\left(\frac{1}{4}+\frac{1}{4}\right)}-3^{\left(\frac{1}{4}+\frac{1}{2}\right)}\right)\\
&= \left(1+3^{\frac{1}{2}}+3^{\frac{3}{4}}\right)\left(3^{0}+3^{\frac{2}{4}}-3^{\frac{3}{4}}\right)\\
&= \left(1+3^{\frac{1}{2}}+3^{\frac{3}{4}}\right)\left(1+3^{\frac{1}{2}}-3^{\frac{3}{4}}\right)\\
&= \left((1+3^{\frac{1}{2}})+3^{\frac{3}{4}}\right)\left((1+3^{\frac{1}{2}})-3^{\frac{3}{4}}\right)\\
&= \left(1+3^{\frac{1}{2}}\right)^2-\left(3^{\frac{3}{4}}\right)^2\\
&= \left(1^2+2\cdot(1)\left(3^{\frac{1}{2}}\right)+\left(3^{\frac{1}{2}}\right)^2\right)-\left(3^{\frac{3}{4}}\right)^2\\
&= \left(1+2\cdot 3^{\frac{1}{2}}+3\right)-3^{\frac{3}{2}}\\
&= 4+2\cdot 3^{\frac{1}{2}}-3^{\left(1+\frac{1}{2}\right)}\\
&= 4+\left(2\cdot 3^{\frac{1}{2}}-3\cdot 3^{\left(\frac{1}{2}\right)}\right)\\
&= 4-3^{\frac{1}{2}}\\
&= 4-\sqrt{3}
\end{aligned}$$

ตัวอย่าง 188. จงคำนวณหา $\sqrt{(1,000,000)(1,000,001)(1,000,002)(1,000,003)+1}$ โดยไม่ใช้เครื่องคำนวณ

วิธีทำ
กำหนดให้ $x = 1,000,000 = 10^6$ ซึ่งจะได้ว่า
$(1,000,000)(1,000,001)(1,000,002)(1,000,003) = (1,000,000)(1,000,000+1)(1,000,000+2)(1,000,000+3)$
พิจารณา

$$\begin{aligned}(1,000,000)(1,000,001)(1,000,002)(1,000,003) &= x(x+1)(x+2)(x+3)\\ &= x(x+3)(x+1)(x+2)\\ &= (x^2+3x)(x^2+3x+2)\end{aligned}$$

กำหนดให้ $y = x^2+3x$ จะได้ว่า

$$x(x+1)(x+2)(x+3)+1 = (x^2+3x)(x^2+3x+2)+1 = y(y+2)+1 = (y+1)^2$$

ดังนั้น

$$\begin{aligned}\sqrt{x(x+1)(x+2)(x+3)+1} &= y+1\\ &= x^2+3x+1\\ &= (10^6)^2+(3\cdot 10^6)+1\\ &= 10^{12}+(3\cdot 10^6)+1\\ &= 1,000,003,000,001\end{aligned}$$

$$\therefore \sqrt{(1,000,000)(1,000,001)(1,000,002)(1,000,003)+1} = 1,000,003,000,001$$

คำถาม 189. จงหาค่าของ $\left[2^{\frac{1}{4}}\left(1+2^{\frac{1}{2}}+2^{\frac{3}{4}}\right)\left(2^{(-\frac{1}{4})}+2^{\frac{1}{4}}-2^{\frac{1}{2}}\right)\right]^2$

คำถาม 190. จงหาค่าของ $\sqrt{4^{\frac{1}{4}}\left(1+4^{\frac{1}{2}}+4^{\frac{3}{4}}\right)\left(4^{(-\frac{1}{4})}+4^{\frac{1}{4}}-4^{\frac{1}{2}}\right)}$

คำถาม 191. จงหาค่าของ $\sqrt[3]{\left[5^{\frac{1}{4}}\left(1+5^{\frac{1}{2}}+5^{\frac{3}{4}}\right)\left(5^{(-\frac{1}{4})}+5^{\frac{1}{4}}-5^{\frac{1}{2}}\right)\right]^{\frac{2}{3}}}$

คำถาม 192. จงคำนวณหา $\sqrt{(100)(101)(102)(103)+1}$ โดยไม่ใช้เครื่องคำนวณ

คำถาม 193. จงคำนวณหา $\sqrt{(200)(201)(202)(203)+1}$ โดยไม่ใช้เครื่องคำนวณ

คำถาม 194. จงคำนวณหา $\sqrt{(503)(502)(501)(500)+1}$ โดยไม่ใช้เครื่องคำนวณ

คำถาม 195. จงคำนวณหา $\sqrt{(11,503)(11,502)(11,501)(11,500)+1}$ โดยไม่ใช้เครื่องคำนวณ

คำถาม 196. จงหาค่า x ที่เป็นจำนวนจริง จากสมการ $\sqrt{x+\sqrt{x+\sqrt{x+\sqrt{\cdots}}}} = 2$

คำถาม 197. จงหาค่า x ที่เป็นจำนวนจริง จากสมการ $\dfrac{x+\sqrt{x^2-1}}{x-\sqrt{x^2-1}}+\dfrac{x-\sqrt{x^2-1}}{x+\sqrt{x^2-1}} = 98$

คำถาม 198. จงหาค่า x ที่เป็นจำนวนจริง จากสมการ

$$\cfrac{1}{1+\cfrac{1}{1+\cfrac{1}{\begin{matrix}\ddots\\ 1+\cfrac{1}{1+\cfrac{1}{x}}\end{matrix}}}} = x$$

คำถาม 199. จงหาค่า x ที่เป็นจำนวนจริง จากสมการ

$$\sqrt{x+\sqrt{x+11}}+\sqrt{x+\sqrt{x-11}}=4$$

คำถาม 200. จงหาค่า x ที่เป็นจำนวนจริง จากสมการ

$$\underbrace{\sqrt{x+2\sqrt{x+2\sqrt{x+\cdots+2\sqrt{x+2\sqrt{3x}}}}}}_{n \text{ ราก}}=x$$

คำถาม 201. จงหาค่า x ที่ทำให้สมการ $2\sqrt{\frac{x}{a}}+3\sqrt{\frac{a}{x}}=\frac{b}{a}+\frac{6a}{b}$ เป็นจริง

คำถาม 202. จงหาค่า x ที่ทำให้สมการ $(x-7)(x-3)(x+5)(x+1)=1680$ เป็นจริง

5 ตัวอย่างข้อสอบ

1. จงหาค่าของ $\dfrac{3^{2(3n-1)}\times 3^{3(3-n)}\times 81^{\frac{1-n}{4}}\times 2^{2(m+1)}}{(3^4)^{\frac{n}{2}}\times 3^5\times 2^{2m-1}}$
2. จงหาค่าของ $\dfrac{(3\times 2^{n+1})-(4\times 2^{n-2})}{2^n-2^{n-1}}$
3. จงหาค่า 2^{-2x} เมื่อ $2^x=0.25$
4. จงหาค่า m เมื่อ $64^{m+2}=1$
5. จงหาค่า k เมื่อ $2^{k+5}-248=2^{2k}$
6. ข้อใดมีค่ามากที่สุด ถ้า $a=2^{45}$, 3^{36}, $c=4^{27}$, $d=5^{18}$, $e=6^9$
7. (Onet 25 ก.พ. 49) จงหาค่าของ $(\sqrt{2}+\sqrt{8}+\sqrt{18}+\sqrt{32})^2$
8. (Onet 25 ก.พ. 49) จงหาค่าของ $\dfrac{\sqrt[5]{-32}}{\sqrt[3]{27}}+\dfrac{2^6}{(64)^{\frac{3}{2}}}$
9. (Onet 24 ก.พ. 50) จงหาค่าของ $\dfrac{8^{\frac{2}{3}}}{\sqrt[4]{144}}\cdot\dfrac{(18)^{\frac{1}{2}}}{\sqrt{6}}$

10. (Onet 24 ก.พ. 50) จงหาค่าของ $(1-\sqrt{2})^2(2+\sqrt{8})^2(1+\sqrt{2})^3(2-\sqrt{8})^3$

11. (Onet 24 ก.พ. 50) ถ้า $\left(3+\frac{3}{8}\right)^{3x} = \frac{16}{81}$ จงหาค่าของ x

12. (B-PAT1 25 ต.ค. 51) ถ้า $6^{x+y} = 36$ และ $5^{x+2y} = 125$ จงหาค่า x

13. (B-PAT1 25 ต.ค. 51) ถ้า $xy = 2$ จงหาค่า $\frac{2^{(x+y)^2}}{2^{(x-y)^2}}$

14. (Onet 21 ก.พ. 52) จงหาค่าของ $\sqrt{(-2)^2} + \left(\frac{8^{\frac{1}{2}} + 2\sqrt{2}}{\sqrt{32}}\right)$

15. (PAT 7 มี.ค. 52) ถ้า $4^{y-x} = 128$ และ $3^{2y+x} = 81$ จงหาค่า y

6 ตัวอย่างโจทย์ครูอาหนึ่ง

1. จงหาผลสำเร็จของ $2^{3^{0^{2^{4^{8^0}}}}}$ (ครูอาหนึ่ง ชูไวย)

2. จงหาผลสำเร็จของ $\frac{2^{-2}+2^2}{2^2-2^{-2}}$ (ครูอาหนึ่ง ชูไวย)

3. จงหาผลลัพธ์ของ $\frac{(111_2)^2+(102_3)^2}{2\times 101_4}$ (ครูอาหนึ่ง ชูไวย)

4. จงหาผลลัพธ์ของ $\frac{2^3+2^4-2^5}{2^3}$ (ครูอาหนึ่ง ชูไวย)

5. จงหาผลสำเร็จของ $\left(\frac{(x-y)^3(2x-2y)^{-4}}{(4x-4y)^{-2}}\right)^5$ (ครูอาหนึ่ง ชูไวย)

6. จงหาค่าของ $\frac{1^{1000x}+1^{2^{100x}}}{1^{5x}+1^{2|x|}}$ โดยที่ x เป็นจำนวนเต็ม (ครูอาหนึ่ง ชูไวย)

7. ให้ $A = \frac{2^{16}-1}{2^4-1}$ มีจำนวนเฉพาะที่เป็นบวกกี่จำนวนที่หาร A ลงตัว (ครูอาหนึ่ง ชูไวย)

8. กำหนดให้ $N^5 = 32768$ และ $M^4 = 1296$ จะได้ ห.ร.ม. ของ N กับ M มีค่าเท่าใด (ครูอาหนึ่ง ชูไวย)

9. กำหนดให้ a, b และ c เป็นจำนวนนับ ซึ่ง $a^4 < b^4 < c^4 < 700$ จะได้ $\frac{6}{25}\left(\frac{a^2+b^2+c^2}{a+b+c}\right)$ มีค่ามากที่สุดเท่าใด (ครูอาหนึ่ง ชูไวย)

10. ให้ $s < t < x < y < z < 225$ และ $\sqrt{s}, \sqrt{t}, \sqrt{x}, \sqrt{y}, \sqrt{z}$ เป็นจำนวนเต็ม แล้ว $\frac{x+y+z-2}{t-s}$ มีค่ามากที่สุดเท่าไร (ครูอาหนึ่ง ชูไวย)

11. ถ้าผลต่างของกำลังสามของจำนวนนับสองจำนวนที่เรียงติดกัน คือ y เมื่อ y คือจำนวนนับ แล้ว y จะเป็นจำนวนนับใดได้บ้าง (ครูอาหนึ่ง ชูไวย)

12. ถ้าผลต่างของกำลังสองของจำนวนนับสองจำนวนที่เรียงติดกัน คือ x เมื่อ x คือจำนวนนับ แล้วผลบวกของ x ทุกตัว โดยที่ $x \leq 100$ มีค่าเป็นเท่าไร (ครูอาหนึ่ง ชูไวย)

13. ถ้า s เป็นจำนวนเต็มที่มีค่ามากที่สุดที่หาร $x^2 - y^2$ ลงตัว สำหรับจำนวนคี่บวก x และ y ทุกตัว โดยที่ $x > y$ แล้ว จงหาค่าของ $\dfrac{3s+4}{4}$(ครูอาหนึ่ง ชูไวย)

14. ให้ $s < t < x < y < z < 1000$ และ $\sqrt[3]{s}, \sqrt[3]{t}, \sqrt[3]{x}, \sqrt[3]{y}, \sqrt[3]{z}$ เป็นจำนวนเต็ม แล้ว $2(x+y)s - 3tz$ มีค่ามากที่สุดเท่าไร (ครูอาหนึ่ง ชูไวย)

15. จงหา $\sqrt{(1,000,000,000,001)(1,000,000,000,002)(1,000,000,000,003)(1,000,000,000,004)+1}$ โดยไม่ใช้เครื่องคำนวณ (ครูอาหนึ่ง ชูไวย)

16. จงหาค่าของ $\dfrac{\left(\sqrt[4]{\left[2^{\frac{1}{4}}\left(1+2^{\frac{1}{2}}+2^{\frac{3}{4}}\right)\left(2^{(-\frac{1}{4})}+2^{\frac{1}{4}}-2^{\frac{1}{2}}\right)\right]^2}\right)^{\frac{2}{3}}}{2}$ (ครูอาหนึ่ง ชูไวย)

17. จงหาค่า $\sqrt{x}$ โดยที่ x เป็นจำนวนจริง จากสมการ $\sqrt{x+\sqrt{x+13}}+\sqrt{x+\sqrt{x-13}}=5$ (ครูอาหนึ่ง ชูไวย)

18. จงประมาณค่าของ $\sqrt[4]{\left(\dfrac{\sqrt{116}}{\sqrt{53}}+\sqrt{111}\right)^5}$ โดยไม่ใช้เครื่องคำนวณ (ครูอาหนึ่ง ชูไวย)

19. จงหาค่า x ที่ทำให้สมการ $\sqrt[4]{2\sqrt{\dfrac{x}{a}}+3\sqrt{\dfrac{a}{x}}} = \left(\dfrac{b}{a}+\dfrac{6a}{b}\right)^{\frac{1}{4}}$ เป็นจริง (ครูอาหนึ่ง ชูไวย)

20. จงหาค่า $\sqrt{2x}$ ที่เป็นจำนวนจริง จากสมการ

$$\underbrace{\sqrt{x+2\sqrt{x+2\sqrt{x+\cdots+2\sqrt{x+2\sqrt{3x}}}}}}_{n \text{ ราก}} = x$$

(ครูอาหนึ่ง ชูไวย)

21. จงหาค่า $(5x-1)^{\frac{3}{5}}$ ที่เป็นจำนวนจริง จากสมการ

$$\cfrac{1}{1+\cfrac{1}{1+\cfrac{1}{\vdots \atop 1+\cfrac{1}{1+\cfrac{1}{x}}}}} = x$$

(ครูอาหนึ่ง ชูไวย)

22. สำหรับทุก $n \in \mathbb{Z}^+$ จงหาค่า $\sqrt{\left(\sqrt[n]{a+b}\right)^{2n}}$ เมื่อ a และ b เป็นจำนวนเต็มบวก ที่ทำให้ $\sqrt{12-2\sqrt{21}} = \sqrt{a}+\sqrt{b}$ (ครูอาหนึ่ง ชูไวย)

23. ถ้า $(\frac{1}{9})^{-x} = 4$ แล้ว $\sqrt{\dfrac{\sqrt[3]{\left(\dfrac{(81)^x}{\sqrt[3]{(27)^x}}\right)}}{2}}$ มีค่าเป็นเท่าใด (ครูอาหนึ่ง ชูไวย)